

線形システム解析

池田建司¹

`iked@is.tokushima-u.ac.jp`

¹ 徳島大学

April 3, 2020

線形システム解析 2020 年度 前期

第 1 回	4 月 15 日 (水)	5,6 講時@K201	イントロダクション
第 2 回	4 月 22 日 (水)	5,6 講時@K201	モデル表現
第 3 回	4 月 29 日 (水)	5,6 講時@K201	ラプラス変換の性質
第 4 回	5 月 13 日 (水)	5,6 講時@K201	演習
第 5 回	5 月 20 日 (水)	5,6 講時@K201	制御対象の表現
第 6 回	5 月 27 日 (水)	5,6 講時@K201	ブロック線図
第 7 回	6 月 3 日 (水)	5,6 講時@K201	周波数応答
第 8 回	6 月 10 日 (水)	5,6 講時@K201	演習
第 9 回	6 月 17 日 (水)	5,6 講時@K201	内部安定性と入出力安定性
			Routh-Hurwitz の安定判別法
第 10 回	6 月 24 日 (水)	5,6 講時@K201	Nyquist の安定判別法
第 11 回	7 月 1 日 (水)	5,6 講時@K201	PID 制御
第 12 回	7 月 8 日 (水)	5,6 講時@K201	演習
第 13 回	7 月 15 日 (水)	5,6 講時@K201	予備日
第 14 回	7 月 22 日 (水)	5,6 講時@K201	模擬試験
第 15 回	7 月 29 日 (水)	5,6 講時@K201	期末試験
第 16 回	8 月 5 日 (水)	5,6 講時@K201	アイシン精機 (株) 吉田様ご講演 †

† 日程は調整中

イントロダクション

線形システム解析 (Linear System Analysis)

講義の内容

- 動的システムの制御
- いわゆる **古典制御理論 (Classical Control Theory)**

使用する数学

- 複素関数論, 演算子法, **ラプラス変換**など

応用分野

- 航空・宇宙, 自動車, 鉄鋼, 化学プラント, ロボット, **IC 製造装置**, 印刷, スマート・グリッド, ...

SWFPendulum

イントロダクション

線形システム解析 (Linear System Analysis)

講義の内容

- 動的システムの制御
- いわゆる **古典制御理論 (Classical Control Theory)**

使用する数学

- 複素関数論, 演算子法, **ラプラス変換**など

応用分野

- 航空・宇宙, 自動車, 鉄鋼, 化学プラント, ロボット, **IC 製造装置**, 印刷, スマート・グリッド, ...

制御理論の分類

- **古典制御** (1870年頃 ~ 1960年頃に一応の体系化)
 - ラプラス変換, 伝達関数, 周波数応答, ナイキストの安定判別法, **PID** 制御
- **現代制御** (1960年頃 ~)
 - 状態空間モデル, 可制御性, 可観測性, **LQG** 理論
 - 時間領域における設計
 - モデルに基づく制御 \Rightarrow 理論と実際のギャップ
- **ポストモダン制御** (1980年 ~)
 - ロバスト制御, H^∞ ノルム, スモールゲイン定理
 - 周波数領域における設計

教科書・参考書

教科書

- 添田 喬・中溝高好: 自動制御の講義と演習, 日新出版

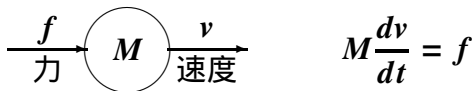
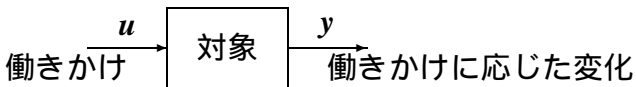
副読本

- 示村悦二郎: 自動制御とは何か, コロナ社

その他の参考書

- 吉川恒夫: 古典制御論, 昭晃堂
- 中野道雄・美多 勉: 制御基礎理論, 昭晃堂
- 片山 徹: フィードバック制御の基礎, 朝倉書店
- 新 誠一: 制御理論の基礎, 昭晃堂

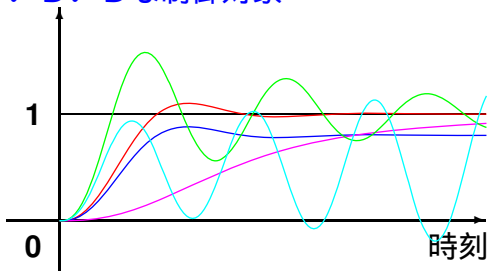
動的システム



操作入力, **操作量**, input

応答, **制御量**, output

いろいろな制御対象



● 緩慢な立上り

● 振動的

● 不安定

● 定常偏差

⋮

制御の目的

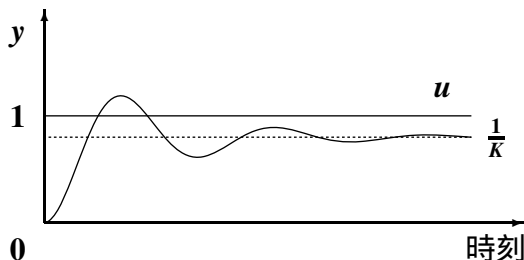
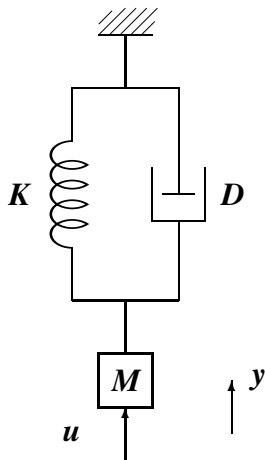
- 立上りの緩慢な制御対象の立上りを速くする (速応性)
 - 振動的すぎる制御対象の減衰特性を改善する
 - 不安定なシステムを安定化する
 - 目標値に一致させる (目標値追従特性)
 - 外乱の影響を抑える (外乱抑制性能)
 - 干渉がある制御対象の干渉をなくす (非干渉化) or 適切な干渉をデザインする
- ⋮

(例) バネ質量ダンパ系

Spring-Mass-Damper System

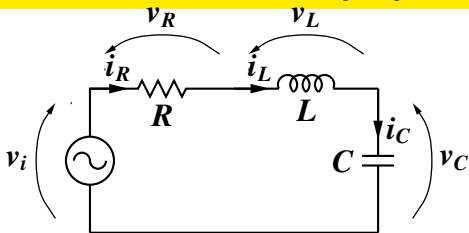
- 平衡点からの位置 y (制御量)
- 質点 M に加える力 u (操作量)
- 運動方程式:

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = u$$



SWF_{smd}

(例) RLC回路



まとめると

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{L}v_i$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}i_L$$

行列表現すると,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} v_i$$

(1) 各要素の方程式

$$v_R = Ri_R$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

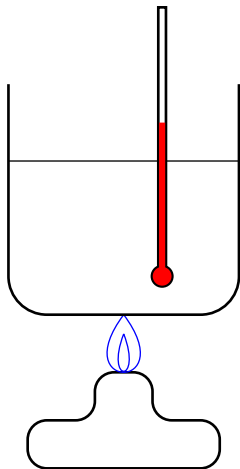
$$\Rightarrow i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

(2) 要素間の接続関係

$$v_i = v_R + v_L + v_C$$

$$i_R = i_L = i_C$$

(例) 熱系



- 水の温度 θ
- 水の熱容量 C_{th}
- 単位時間に加える熱量 q_{th}

$$\theta = \frac{1}{C_{th}} \int q_{th} dt$$

(例) 流体系

- 理想流体 (エネルギー散逸なし) はオイラーの方程式に従う。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

\mathbf{v} :速度, p :圧力, ρ :密度は座標 (x, y, z) と時刻 t の関数。

- cf. 定常流の場合はベルヌーイの定理に従う。

$$\frac{1}{2}v^2 + w = \text{const.}$$

w : 単位質量あたりの熱関数 (エンタルピー)

- cf. 非圧縮性粘性流体はナビエ-ストークスの方程式に従う。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

η : 粘性係数

Feedback vs Feedforward

ロボットの直進制御の例

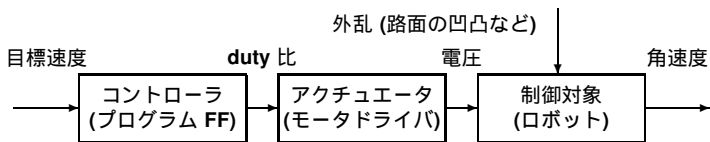


Fig. 1 ロボットのフィードフォワード制御

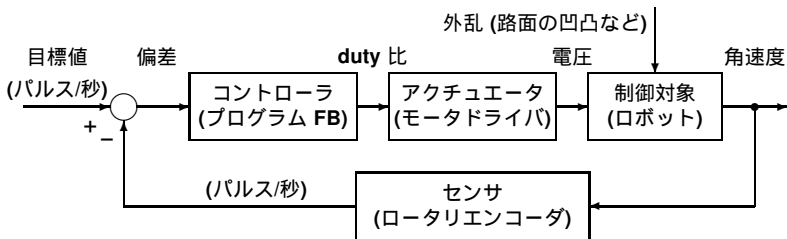
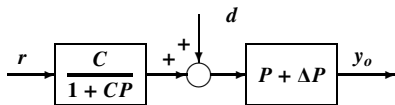
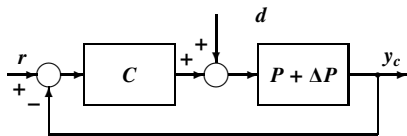


Fig.2 ロボットのフィードバック制御

FF制御 v. FB制御 (つづき)



(a) Feedforward System

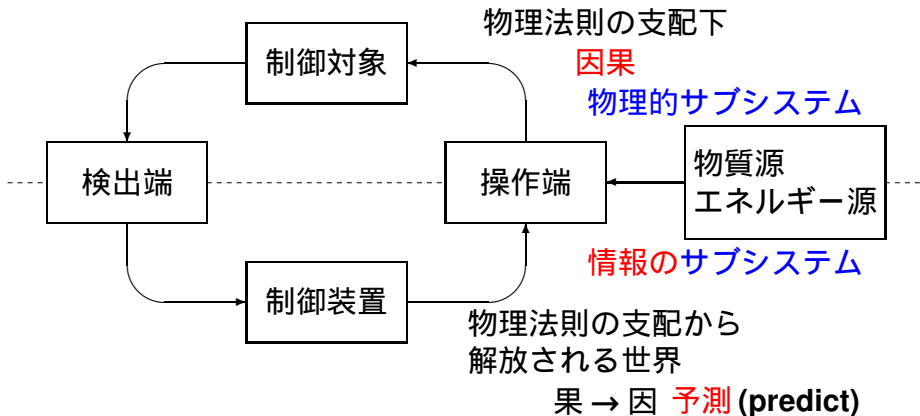


(b) Feedback System

	FF制御	FB制御
センサ	不要	必要
外乱抑制性	×	
ロバスト安定性	×	
設計の難易度		×

FF制御は設計は簡単だが、制御性能には限界がある

情報工学としての制御系設計論



本日のまとめ(イントロダクション)

- 制御理論は、**古典制御**、**現代制御**、**ポストモダン制御**に分類される。
本講義では、古典制御の習得を目指す。
- **動的システム**の制御を扱う。
機械系、電気系、化学系など、動的システムとして扱わないといけない重要な工学システムが多数存在する。
- いろいろな制御対象が存在する
緩慢な立ち上がり、**振動的**、**不安定**、**定常偏差**、....
対象や状況に応じて、様々な制御目的がある。
- **フィードバック制御**は世の中の様々な場面で活躍している。
フィードバック制御系は、**物理的サブシステム**と**情報のサブシステム**が融合したものである。

モデル表現

- モデルとは、“**制御対象は斯く振る舞う**”という知識
- 精密であればあるほどよいというものでもない
非線形, 無限次元モデルは, 複雑で扱いにくい
- よいモデル
 - 制御対象の特性を記述しやすい
 - 問題設定しやすい(制御目的などを記述しやすい)
 - 設計しやすい(解きやすい)
 - 解析しやすい
- **線形有限次元モデル**が良く使われる。

状態方程式表現

1 階連立微分方程式と出力方程式 (代数方程式)

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t)\end{aligned}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

(例) RLC 回路

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} v_i(t) \\ v_o(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

入出力関係微分方程式

入力と出力に関する高階微分方程式

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

or

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \cdots + b_m u^{(m)}$$

(例) バネ質量ダンパ系

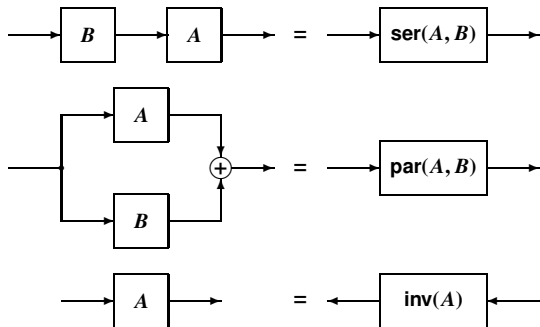
$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$$

(例) RLC 回路

$$LC\ddot{v}_o(t) + RC\dot{v}_o(t) + v_o(t) = v_i(t)$$

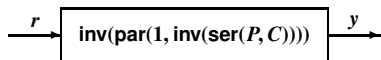
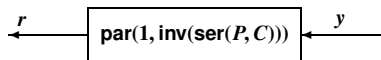
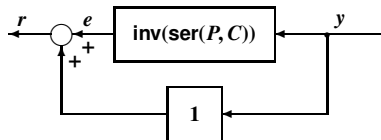
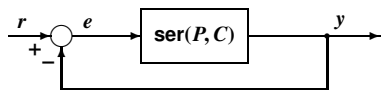
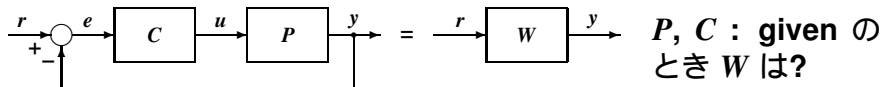
解析・設計に便利なモデル

- 直列接続・並列接続・逆の関係を表せると便利



- $\text{ser}(\cdot, \cdot)$, $\text{par}(\cdot, \cdot)$, $\text{inv}(\cdot)$ という演算がモデル表現を使って簡単に計算できると便利

(例) FB 制御系の特性解析



(1) C, P の直列接続

(2) $e \rightarrow y$ の逆と

$$e = r - y \Rightarrow r = e + y$$

(3) 並列接続 (4) 逆

$$W = \text{inv}(\text{par}(1, \text{inv}(\text{ser}(P, C))))$$

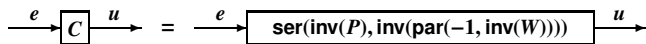
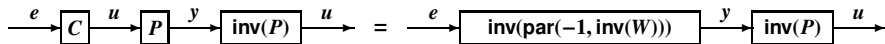
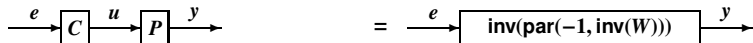
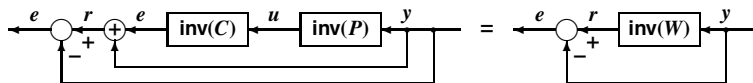
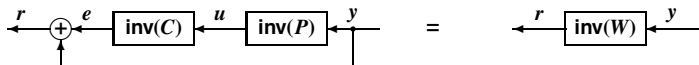
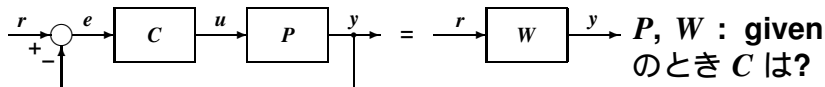
$$\text{ser}(A, B) = A \cdot B,$$

$$\text{par}(A, B) = A + B,$$

$$\text{inv}(A) = A^{-1}$$

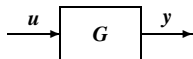
だと嬉しい

(例) 補償器の設計



$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u}$ のままだと $\text{ser}(\cdot, \cdot)$, $\text{par}(\cdot, \cdot)$, $\text{inv}(\cdot)$ は扱いにくい

便利なモデル表現の導出 (1)



$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u}$$

- $y = Au$ (定数倍) と書けると便利
`ser(·, ·)`, `par(·, ·)`, `inv(·)` が簡単になる
- ある特別な波形に対して, 出力が入力の定数倍になるような入力波形はあるだろうか? → **Yes.** $u = e^{st}$
- $u = e^{st}$ (s は複素定数) のとき, $\exists A$ s.t. $y = Ae^{st}$. 実際,

$$a_2s^2Ae^{st} + a_1sAe^{st} + a_0Ae^{st} = b_0e^{st} + b_1se^{st}$$

より

$$A = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

- もっと一般の入力波形に関してはどうなるか?

cf. 重ね合わせの原理

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \mapsto y_1 \\ u_2 \mapsto y_2 \end{array} \right\} \text{のとき} \quad c_1 u_1 + c_2 u_2 \mapsto c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \xrightarrow{u} \boxed{G} \xrightarrow{y}$$

が成り立つことを重ね合わせの原理 (or 重畳原理) という線形常微分方程式の場合,

$$\left. \begin{array}{l} a_2 \ddot{y}_1 + a_1 \dot{y}_1 + a_0 y_1 = b_0 u_1 + b_1 \dot{u}_1 \\ a_2 \ddot{y}_2 + a_1 \dot{y}_2 + a_0 y_2 = b_0 u_2 + b_1 \dot{u}_2 \end{array} \right\} \text{のとき}$$

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} (y_1 + y_2) + a_1 \frac{d}{dt} (y_1 + y_2) + a_0 (y_1 + y_2)$$

$$= b_0 (u_1 + u_2) + b_1 \frac{d}{dt} (u_1 + u_2)$$

なので、確かに重ね合わせの原理が成り立っている。
(実は、重畳原理が成り立つシステムを線形システムという)

便利なモデル表現の導出 (2)

- もっと一般の入力波形に関してはどうなるか?
- 重ね合わせの原理より

$$u(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \frac{b_1 s_1 + b_0}{a_2 s_1^2 + a_1 s_1 + a_0} e^{s_1 t} + c_2 \frac{b_1 s_2 + b_0}{a_2 s_2^2 + a_1 s_2 + a_0} e^{s_2 t}$$

- もっと一般には

$$u(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{s_i t} \Rightarrow y(t) = \sum_{i=1}^N c_i \frac{b_1 s_i + b_0}{a_2 s_i^2 + a_1 s_i + a_0} e^{s_i t}$$

- 要素のパラメータと信号のパラメータが混在している
このままだと扱いにくい!!

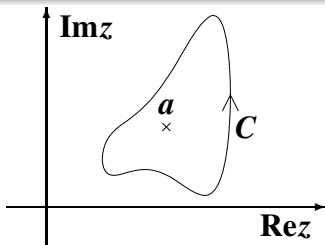
cf. Cauchy の積分公式

Cauchy の積分公式 (複素関数論における非常に重要な定理の一つ)

ある複素領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対し, D 内の 1 点 a における値 $f(a)$ は, a を囲み, D 内にある閉曲線 C に沿って次の積分で与えられる

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad j = \sqrt{-1}$$

- C は反時計回り (正の向き)
- 1 点 a における値は, 閉曲線 C 上の値により完全に決定
- C は D 内で a を正の向きに 1 周だけ回る閉曲線ならば何でもよい



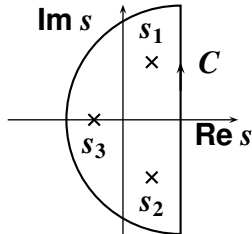
便利なモデル表現の導出 (3)

$$u(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{s_i t}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^N c_i \frac{b_1 s_i + b_0}{a_2 s_i^2 + a_1 s_i + a_0} e^{s_i t}$$

を複素変数 s の関数だと思って, $s = s_1, \dots, s = s_N$ のときの値を **Cauchy** の積分公式を用いて求めると

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s - s_i} \cdot \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} e^{st} ds$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s - s_i} e^{st} ds$$



変換のメカニズム,
入力信号の表現,
要素の表現

便利なモデル表現の導出 (4)

- 変換のメカニズムを使うと, $u(t)$, $y(t)$ は

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint U(s)e^{st} ds, \quad y(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint G(s)U(s)e^{st} ds$$

$$\text{ただし, } U(s) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s - s_i}, \quad G(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}.$$

- $G(s)U(s)$ は $y(t)$ の表現なので $Y(s)$ とおくと

$$(\text{出力信号}) = (\text{要素}) \times (\text{入力信号})$$

とかけ算で表されている!!

- $U(s)$, $Y(s)$ は $u(t)$, $y(t)$ の **Laplace 変換** に,
 $G(s)$ は **伝達関数** という概念に一般化される

ラプラス変換

- Laplace 変換 $\xleftarrow{\text{一般化}}$ Fourier 変換 $\xleftarrow{\text{一般化}}$ Fourier 級数
- 線形微分方程式を代数的に解く簡単な手法を与える
- 線形微分方程式と複素関数論を結びつける

cf. フーリエ級数

- 周期信号を三角関数列によって展開したもの
- 物理学や工学でも広く応用されている

cf. フーリエ変換

- フーリエ級数を一般の関数に拡張したもの
- 時間領域と周波数領域の対応を与える
- 周波数解析など信号処理を行うための必須アイテム

cf. フーリエ級数

区分的に連続な基本周期 T の任意の周期信号 $x(t)$ はフーリエ級数によって

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{2\pi n}{T} t$$

ただし,

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t dt$$

複素フーリエ級数として表すこともできる。

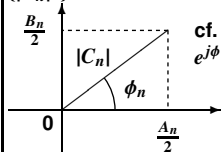
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt$$

C_n と A_n, B_n との間には次の関係がある。

$$|C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{B_n}{A_n} \right)$$

$\{|C_n|\}$ を振幅スペクトル,
 $\{\phi_n\}$ を位相スペクトル,
 $\{|C_n|^2\}$ をパワースペクトルという。



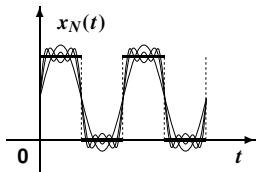
cf. オイラーの公式:
 $e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$

cf. フーリエ級数の例

矩形波

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq T/2) \\ 0 & (T/2 < t \leq T) \end{cases}$$

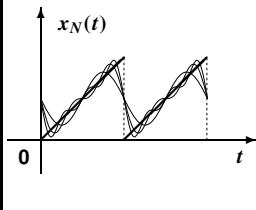
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin \frac{2\pi(2m-1)}{T} t$$



のこぎり波

$$x(t) = t/T \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n}{T} t$$



フーリエ級数を有限項で打ち切ることによって誤差が生じ、不連続点の近傍では細かく振動する。(Gibbs 現象)

cf. フーリエ級数からフーリエ変換へ

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \omega_n = n\Delta\omega \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-j\frac{2\pi n}{T}\tau} d\tau \right) e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{j\omega_n(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

$T \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ とおくと, **Fourier** 変換の公式を得る

cf. フーリエ変換

- 時間領域と周波数領域の対応を与えるもの。

$x(t)$ は区分的に連続で絶対可積分 ($\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$) と仮定

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{Fourier 変換}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \text{反転公式}$$

$|X(\omega)|$ は振幅を, $\angle X(\omega) = \arctan \frac{\text{Im } X(\omega)}{\text{Re } X(\omega)}$ は位相を表している。

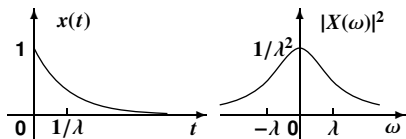
$|X(\omega)|^2$ を $x(t)$ のエネルギー密度スペクトル, あるいは,
パワースペクトル密度 (PSD: Power Spectral Density) という。

cf. フーリエ変換の例

片側指数関数

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\lambda t} & (t \geq 0, \lambda > 0) \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\lambda + j\omega}$$

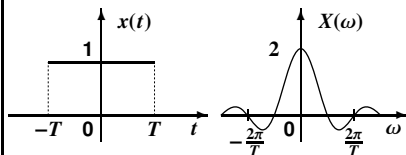


実数値関数のパワースペクトル (密度) は左右対称

箱形関数

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin T\omega}{\omega}$$



$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ は **sinc** 関数と呼ばれ、
サンプリング定理でも使われる

Laplace 変換

$x(t)$ は区分的に連続で $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$ と仮定

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad \text{Laplace 変換}$$

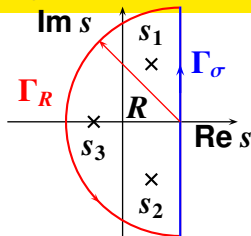
$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad \text{逆 Laplace 変換}$$

- 逆 Laplace 変換を **Bromwich 積分**ともいう
- Fourier 変換における $j\omega$ を $s = \sigma + j\omega$ に拡張したもの

変換のメカニズムとの関係

Jordan の補助定理より Γ_R 上の積分 $\rightarrow 0$

$$\oint = \int_{\Gamma_\sigma} + \int_{\Gamma_R} \rightarrow \int_{\Gamma_\sigma} = \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR}$$



逆ラプラス変換は変換のメカニズムそのもの

Jordan の補助定理

$s \rightarrow \infty$ のとき $X(s)$ は 0 に一様収束すると仮定する. すなわち

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R_0 \text{ s.t. } |X(s)| < \varepsilon, \quad \forall |s| > R_0$$

このとき,

$$\int_{\Gamma_R} X(s)e^{st} ds \rightarrow 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

ただし, $t > 0$.

Fourier 変換との関係

$s = \sigma + j\omega$ とおく.

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

よって, $x(t)$ の Laplace 変換は $x(t)e^{-\sigma t}$ の Fourier 変換
 Fourier 変換の反転公式を用いると,

$$\begin{aligned} x(t)e^{-\sigma t} &= \mathcal{F}^{-1}[X(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} e^{-\sigma t} ds \quad (s = \sigma + j\omega) \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad \text{逆 Laplace 変換の公式を得る} \end{aligned}$$

本日のまとめ(モデル表現)

- **モデル**は対象に関する知識
- モデルには, 正確さだけでなく, **同定, 問題設定, 設計, 解析**のし易さも要求される.
- 対象の**線形性**を利用すると, **ser(·, ·), par(·, ·), inv(·)** が簡単になる
- **伝達関数**は, 入出力信号の**ラプラス変換の比**として定義される
- 伝達関数は, **変換のメカニズム**を使って導出することもできる. ただし, 複素関数論の知識が必要.

ラプラス変換の性質

ラプラス変換:

- 演算子法を数学的に厳密にしたもの
cf. 演算子法は、微分方程式を代数方程式に代える道具
$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = u, D = \frac{d}{dt} \Rightarrow (D^2 + a_1D + a_2)y = u$$
- フーリエ変換 ((有界変動な) 可積分関数) の一般化

ラプラス変換の定義:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$x(t)$ はある $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して $\int_0^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$ なる信号
 $x(t) = 0$ if $t < 0$ とする

基本関数のラプラス変換

$$(1) \mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$(2) \mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(3) \mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

一般に $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$$(4) \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

オイラーの公式 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ より

$$\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \mathcal{L}[\cos \omega t] + j\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

基本関数のラプラス変換は重要 (導出できるように)

性質 (1) — 微分 —

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\
 &= f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{部分積分}) \\
 &= -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f''(t)] &= s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\
 &= s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)
 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

性質 (2) — 積分 —

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-st} dt \\
 &= -\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_{t=0}^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-2} d\tau_{n-1}\right] = \frac{1}{s^n} \mathcal{L}[f(t)]$$

性質 (3) — 推移定理 —

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とする

推移定理 I

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

推移定理 II

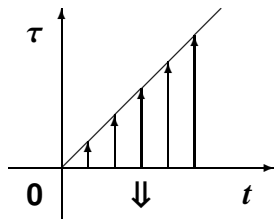
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-a)] &= \int_0^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt \quad (\tau = t-a \text{ とおくと}) \\ &= \int_{-a}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)} d\tau = e^{-as} \int_{-a}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-as} F(s) \end{aligned}$$

e^{-as} は, $a > 0$ のとき時間遅れとなる

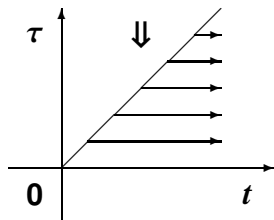
性質 (4) — 畳み込み積分 —

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)], G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ とする

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] \\
 &= \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] \\
 &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau) g(t - \tau) e^{-st} dt d\tau \\
 &= \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_0^\infty g(\tau') e^{-s\tau'} d\tau' \right) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)] = \mathbf{F(s)G(s)}
 \end{aligned}$$



積分順序の入替



積分変数 t から τ' への変換

$$\tau' = t - \tau, \begin{cases} t \rightarrow \infty \\ \tau' \rightarrow 0 \end{cases}$$

SWFconv

性質 (5)—最終値定理, 初期値定理—

性質 (1)—微分—より,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (*)$$

(*) 式で, $s \rightarrow 0$ とすると

$$\int_0^{\infty} f'(t)dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

よって,

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad \text{最終値定理}$$

一方, (*) 式で, $s \rightarrow \infty$ とすると, 左辺 = 0 より,

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad \text{初期値定理}$$

性質 (6)—ディラックの δ 関数—

任意の関数 $f(t)$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$$

となる $\delta(t)$ を **Dirac の δ 関数** という.

δ 関数のラプラス変換

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \mathbf{1}$$

性質 (4)—畳み込み積分—より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] = F(s) &= F(s) \times \mathbf{1} = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ \Rightarrow f(t) &= \int_0^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

cf. Dirac の δ 関数

実は $\delta(t)$ は関数 (数から数への写像) ではなく、
超関数 or 分布 と呼ばれるもの。

δ 関数を関数列の極限とみなすこともできる

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1$$

$\delta_n(t)$ の例 1

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon_n & \text{if } -\varepsilon_n/2 \leq t < \varepsilon_n/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

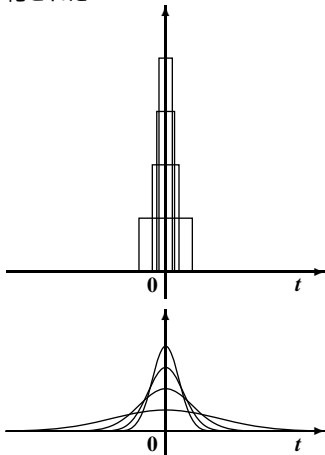
ただし, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. 例えば $\varepsilon_n = 1/n$.

$\delta_n(t)$ の例 2

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}}$$

ただし, $\sigma_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

δ 関数は量子力学で有名な物理学者
P. A. M. Dirac により直感的に導入され、
L. Schwartz の **distribution** や佐藤幹夫の
hyperfunction などの理論により数学的に正当
化された



微分方程式の解法

線形微分方程式 $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = \sin 2t$ を初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ のもとで解く。
 まず、基本関数のラプラス変換と微分のラプラス変換を使って、両辺をラプラス変換する。

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

初期条件を代入してまとめると

$$(s^2 + 2s + 2)X(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \Rightarrow X(s) = \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 4)}$$

部分分数展開する。(分母=0 の根 (実数/複素数) に応じて 1 次または 2 次の有理式に展開)

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{5} \left(\frac{s+3}{s^2+2s+2} - \frac{s+1}{s^2+4} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+1} - \frac{s+1}{s^2+4} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1} - \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4} \right) \end{aligned}$$

基本関数のラプラス変換と推移定理 I を使って逆ラプラス変換すると

$$x(t) = \frac{1}{5}(e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t)$$

cf. $X(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$ の部分分数展開 (1/2)

$X(s)$ を 2 次の有理式 $\left(\frac{s \text{ の } 1 \text{ 次多項式}}{s \text{ の } 2 \text{ 次多項式}} \right)$ の和として表す.

分母が 2 次式の場合, 分子は高々 $2 - 1 = 1$ 次式. **0 次 (定数) ではない!!**

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 2} = \frac{(As + B)(s^2 + 2s + 2) + (Cs + D)(s^2 + 4)}{(s^2 + 4)(s^2 + 2s + 2)} \\ &= \frac{(A + C)s^3 + (2A + B + D)s^2 + (2A + 2B + 4C)s + (2B + 4D)}{(s^2 + 4)(s^2 + 2s + 2)} \end{aligned}$$

分子の係数を比較すると、次ページの計算より、

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & C & = & 0 \\ 2A & + & B & + & D & = & 0 \\ 2A & + & 2B & + & 4C & = & 0 \\ 2B & & & + & 4D & = & 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1/5 \\ B = -1/5 \\ C = 1/5 \\ D = 3/5 \end{array} \right.$$

よって

$$X(s) = \frac{1}{5} \left(\frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2} - \frac{s + 1}{s^2 + 4} \right)$$

cf. $X(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$ の部分分数展開 (2/2)

連立一次方程式は、係数を抜き出して、ガウスの掃出法を用いて解く。

$$\begin{array}{c}
 A \ B \ C \ D \\
 s^3 \begin{pmatrix} [1] & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\
 s^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\
 s \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & | & 0 \\
 1 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \\
 \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\
 0 & [1] & -2 & 1 & | & 0 \\
 0 & 2 & 2 & 0 & | & 0 \\
 0 & 2 & 0 & 4 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\
 0 & 0 & [6] & -2 & | & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \\
 \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & | & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1/3 & | & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1/3 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & [10/3] & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1/5 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1/5 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1/5 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3/5 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

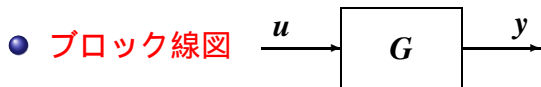
本日のまとめ(ラプラス変換の性質)

- **ラプラス変換**は**フーリエ変換**を一般化したものの微分方程式を代数方程式に変換できる!!!
- ラプラス変換の定義式より, **基本関数のラプラス変換表**が導かれる.
指数関数, ステップ関数, ランプ関数, **sin 関数**, **cos 関数**
- ラプラス変換の**基本的な性質**も定義より導かれる
微分, 積分, 推移定理 (s 領域, t 領域), 畳み込み積分, 最終値/初期値定理, δ -関数
- ラプラス変換を用いた**微分方程式の解法**
入出力信号のラプラス変換, 部分分数展開, 逆ラプラス変換

制御対象の表現

- 状態方程式表現
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$
- 入出力関係微分方程式 $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u}$

- 伝達関数
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0},$$



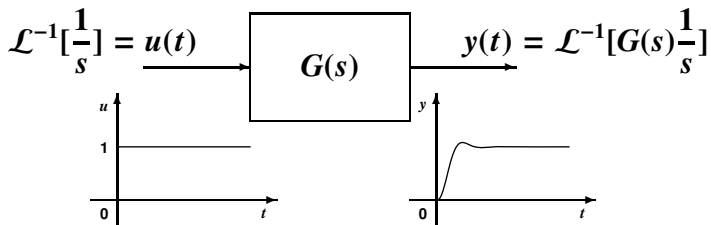
- 畳み込み積分による表現
$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau) d\tau$$

 $Y(s) = G(s)U(s)$ を逆ラプラス変換したもの
 $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ を重み関数 (or 荷重関数) という

- 代表的な入力に対する出力を図示
 ステップ応答, インパルス応答, 周波数応答

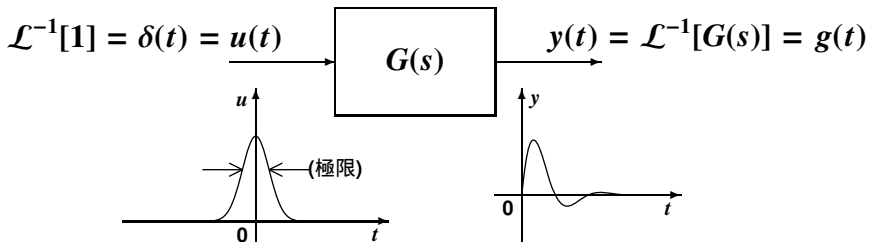
ステップ応答

- ステップ入力 $u(t) = 1(t)$ に対する出力
- 過渡応答特性
- 制御系設計の現場では、非常によく使う
- $\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$ なので, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\frac{1}{s}]$



インパルス応答

- デルタ関数 $u(t) = \delta(t)$ に対する出力
- 現実には $u(t) = \delta(t)$ は入力できない。
- $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ なので, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$

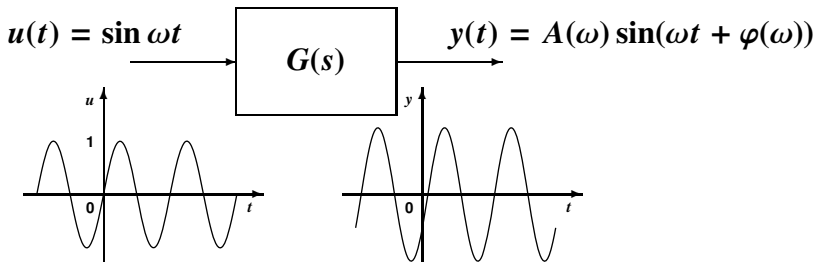


- インパルス応答は重み関数そのもの

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau)\delta(\tau) d\tau = g(t)$$

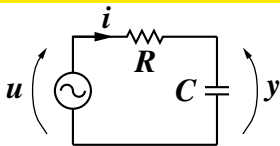
周波数応答

- 正弦波入力 $u(t) = \sin \omega t$ に対する出力
- 定常応答特性
- 制御系設計の現場では、非常によく使う



- $A(\omega)$ はゲイン, $\varphi(\omega)$ は位相遅れ (通常 $\varphi(\omega) < 0$ なので) を表す. $\varphi(\omega) > 0$ のときは位相進み
- $A(\omega) = |G(j\omega)|$, $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ である

伝達関数の例 —1次遅れ—



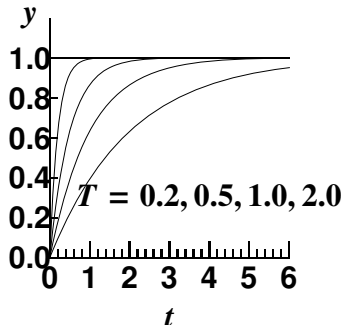
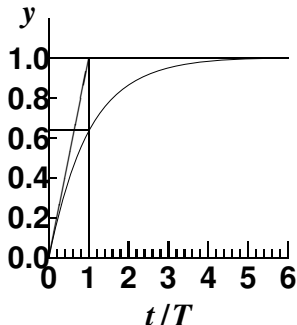
回路の方程式は $RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

両辺をラプラス変換すると $(RCs + 1)Y(s) = U(s)$

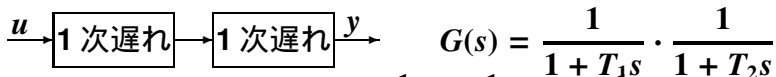
伝達関数は $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + Ts}$

ステップ応答 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{T}{1 + Ts}\right] = 1 - e^{-t/T}$

$T =$ (最終値の 63.2% に達するまでの時間) $=$ (初期速度の逆数)
は時定数



伝達関数の例 —2次遅れ—

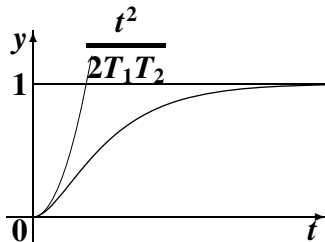


$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + T_1 s} \cdot \frac{1}{1 + T_2 s} \right]$$

ステップ応答
($T_1 \neq T_2$ のとき)

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_1^2}{1 + T_1 s} - \frac{T_2^2}{1 + T_2 s} \right) \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} (T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2})$$

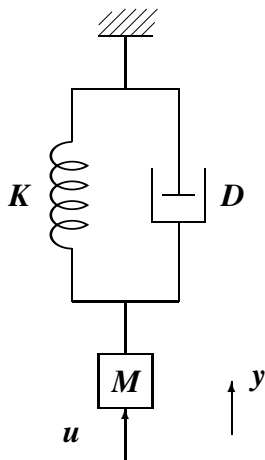


$y(0) = \dot{y}(0) = 0$ より $y(t)$ を
 $t = 0$ でテイラー展開すると,

$$y(t) \sim \frac{t^2}{2T_1 T_2}, \quad \text{if } t^2 \ll T_1 T_2$$

$T_1 = T_2$ のときはどうなるか?

伝達関数の例 —2次振動系—



運動方程式: $M\ddot{y} + D\dot{y} + Ky = u$ より, 伝達関数は

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}$$

$$= \frac{\kappa\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ は固有振動数}$$

$$\zeta = \frac{D}{2\omega_n M} \text{ は減衰係数} \quad (\kappa = \frac{1}{M\omega_n^2})$$

伝達関数の例 —2次振動系(つづき)—

$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ とすると, $s = -\omega_n\zeta \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ より

- $\zeta \geq 1$ ならば, 実根 \Rightarrow **2次遅れ**
- $\zeta < 1$ のとき, **2次振動系** という ($s = -\omega_n\zeta \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$)
- $\zeta = 1$ のときの応答を **臨界制動** という

cf. $\zeta = 1$ のときのステップ応答 ($\kappa = 1$ とする)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \right]$$

$$= \mathbf{1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}}$$

2次振動系のステップ応答

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n) + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \right] \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \text{ とおく} \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \cdot \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] \\
 &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\
 &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right\}
 \end{aligned}$$

2次振動系のステップ応答(つづき)

加法定理

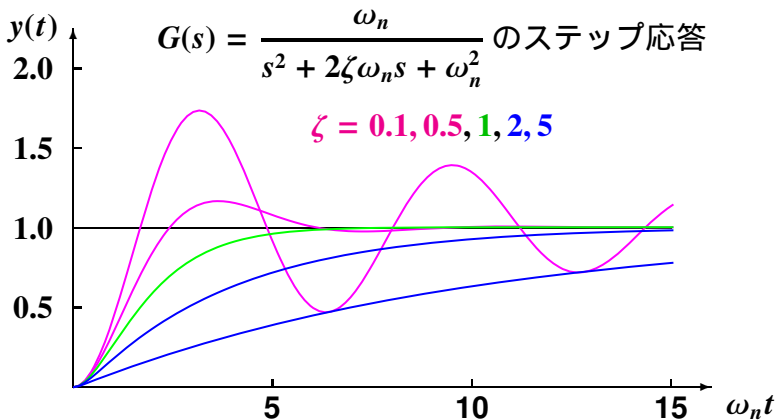
$$\sin(\omega_d t + \varphi) = \sin \omega_d t \cos \varphi + \cos \omega_d t \sin \varphi$$

より, $\tan \varphi = \sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta$ とおくと,

($0 < \zeta < 1$ に注意して, $\sin \varphi = \sqrt{1 - \zeta^2}$, $\cos \varphi = \zeta$ とおくと,)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ \cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right\} \\
 &= 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi \right)
 \end{aligned}$$

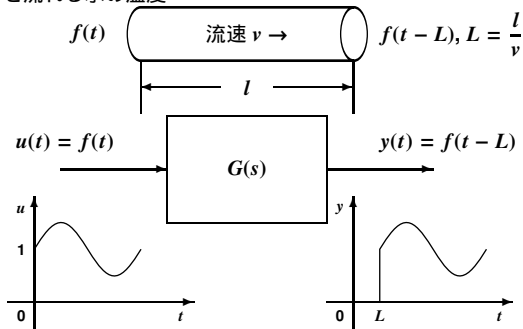
2次振動系のステップ応答(つづき)



不足制動 ($\zeta < 1$), 臨界制動 ($\zeta = 1$), 過制動 ($\zeta > 1$)

伝達関数の例 —むだ時間—

(例) パイプを流れる水の温度



$$\text{伝達関数 } G(s) = \frac{\mathcal{L}[f(t-L)]}{\mathcal{L}[f(t)]} = \frac{F(s)e^{-Ls}}{F(s)} = e^{-Ls}$$

cf. 線形有限次元系 $\Rightarrow G(s) = (s \text{ の有理式}) = \frac{(s \text{ の多項式})}{(s \text{ の多項式})}$

むだ時間 $e^{-Ls} = 1 - Ls + \frac{1}{2}(Ls)^2 - \frac{1}{3!}(Ls)^3 + \dots \Rightarrow$ 無限次元系

本日のまとめ (制御対象の表現)

- 線形な動的システムを表す方法として、
パラメトリック表現・ノンパラメトリック表現を
いくつか紹介
- パラメトリック表現:
状態方程式表現, 入出力微分方程式表現, 伝達関数, など
- ノンパラメトリック表現:
ステップ応答, インパルス応答, 周波数応答など
cf. インパルス応答は畳み込み積分表現の重み関数
cf. 伝達関数は重み関数のラプラス変換
- 要素の接続関係を表すブロック線図もよく用いられる.
- 1次遅れ系, 2次遅れ系, 2次振動系の
伝達関数とステップ応答

ブロック線図

- 制御系における信号伝達の様子を図示したもの
- 信号がどのように伝達されていくか明白になる
- 信号は矢印で表される。
- (1) 伝達要素, (2) 加算器, (3) 引き出し点から構成される。
- ブロックの基本的な結合方式は
(i) 直列接続, (ii) 並列接続, (iii) フィードバック接続である。

ブロック線図の構成要素

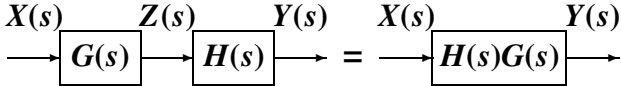
(1) 伝達要素 or ブロック $X(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow Y(s) \Leftrightarrow Y(s) = G(s)X(s)$

(2) 加算器 $X(s) \xrightarrow{+} \bigcirc \xrightarrow{X(s) - Y(s)}$
 $Y(s) \xrightarrow{-}$

(3) 引き出し点 $X(s) \xrightarrow{\bullet} X(s)$
 $X(s) \xrightarrow{\bullet} X(s)$

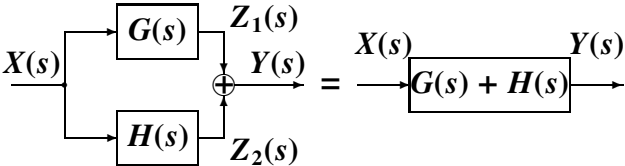
ブロック線図の接続 (1/2)

(i) 直列接続



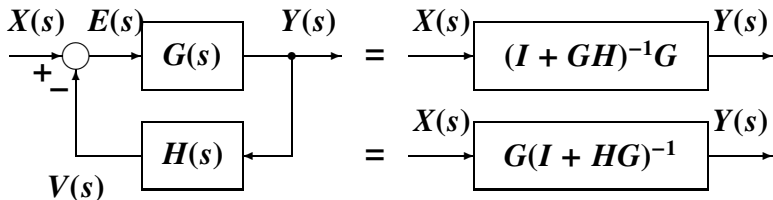
$$\begin{cases} Z(s) = G(s)X(s) \\ Y(s) = H(s)Z(s) \end{cases} \quad Y(s) = H(s)G(s)X(s)$$

(ii) 並列接続



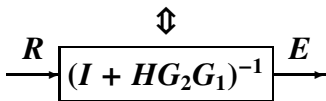
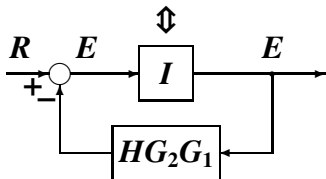
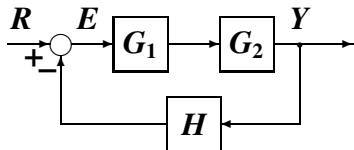
$$\begin{cases} Z_1(s) = G(s)X(s) \\ Z_2(s) = H(s)X(s) \\ Y(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \end{cases} \quad Y(s) = (G(s) + H(s))X(s)$$

(iii) フィードバック接続

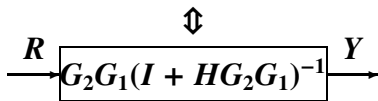
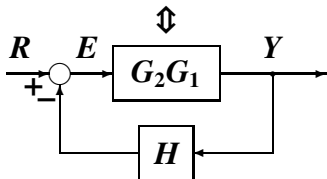


$$\begin{cases} Y(s) = G(s)E(s) \\ V(s) = H(s)Y(s) \\ E(s) = X(s) - V(s) \end{cases} \quad \begin{aligned} Y(s) &= (I + G(s)H(s))^{-1}G(s)X(s) \\ &= G(s)(I + H(s)G(s))^{-1}X(s) \end{aligned}$$

ブロック線図の等価変換



$$E = (I + HG_2G_1)^{-1}R$$

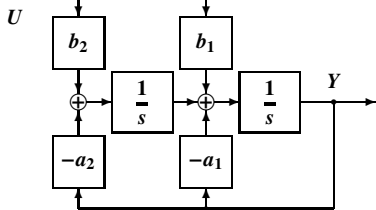


$$Y = G_2G_1(I + HG_2G_1)^{-1}R$$

$$= (I + G_2G_1H)^{-1}G_2G_1R$$

観測器標準形と可観測標準形

観測器標準形

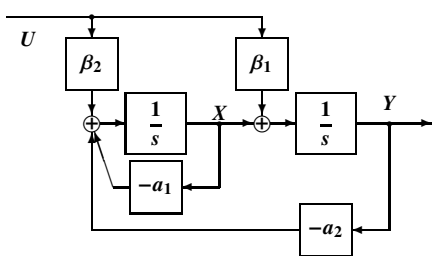


$$Y = \frac{1}{s} \left(b_1 U - a_1 Y + \frac{1}{s} (b_2 U - a_2 Y) \right)$$

$$s^2 Y = (b_1 s + b_2) U - (a_1 s + a_2) Y$$

$$Y = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} U$$

可観測標準形



$$Y = \frac{1}{s} (\beta_1 U + X)$$

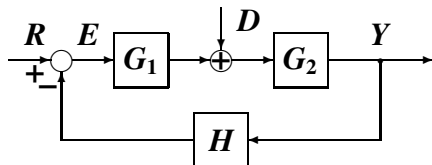
$$X = \frac{1}{s} (\beta_2 U - a_1 X - a_2 Y)$$

より

$$Y = \frac{\beta_1 s + \beta_2 + a_1 \beta_1}{s^2 + a_1 s + a_2} U$$

$\beta_1 = b_1, \beta_2 = b_2 - a_1 b_1$ とおくと、両者は等しくなる。

複数入力の場合



$D = 0$ のとき

$$Y = G_2 G_1 (I + H G_2 G_1)^{-1} R$$

$$= (I + G_2 G_1 H)^{-1} G_2 G_1 R$$

$R = 0$ のとき

$$Y = G_2 (I + G_1 H G_2)^{-1} D$$

$$= (I + G_2 G_1 H)^{-1} G_2 D$$

複数入力の場合, 出力はそれらの和になる

$$Y = (I + G_2 G_1 H)^{-1} G_2 G_1 R + (I + G_2 G_1 H)^{-1} G_2 D$$

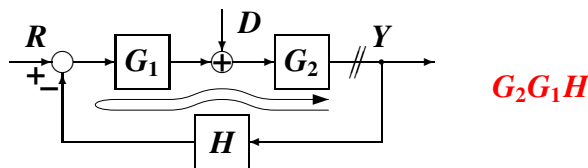
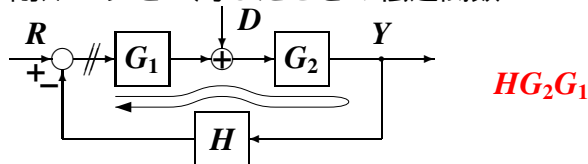
スカラー系の場合

$$Y = \frac{G_2 G_1}{1 + G_2 G_1 H} R + \frac{G_2}{1 + G_2 G_1 H} D$$

$G_2 G_1 H$: 一巡伝達関数, $G_2 G_1$, G_2 は閉ループを無視して $R \rightarrow Y$,
 $D \rightarrow Y$ までの直接のパスの伝達関数

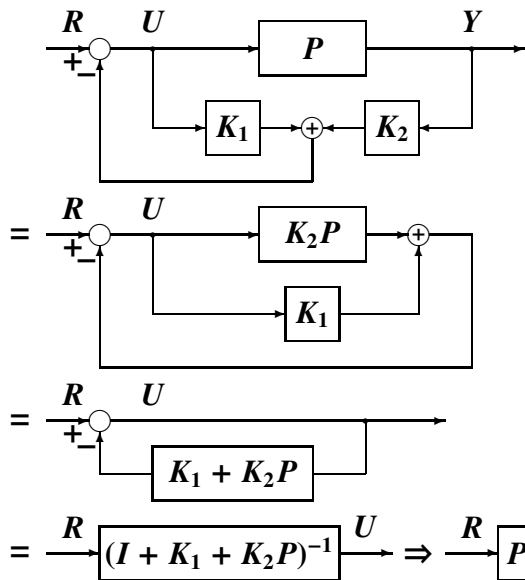
cf. 一巡伝達関数

閉ループを一周したときの伝達関数



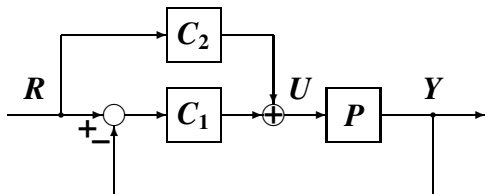
どこから一周したかによって、かけ算の順番が異なる
 (スカラー系の場合は、可換なのでかけ算の順番は関係ない)

例. 観測器併合系のブロック線図



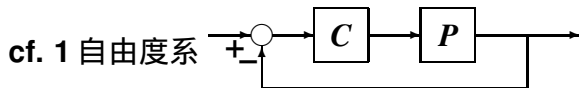
モデルマッチングでよく使われる形
 $(R \rightarrow Y)$ の伝達関数が望ましい伝達関数 $W_D(s)$ に一致するように補償器 K_1, K_2 を設計する問題)

例. 2自由度制御系のブロック線図

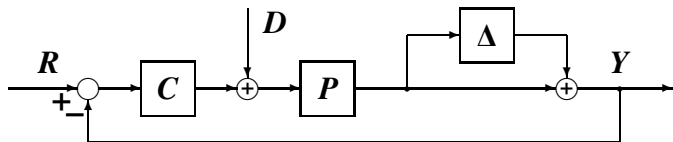


$$\begin{aligned}
 Y &= (I + PC_1)^{-1} PC_1 R + (I + PC_1)^{-1} PC_2 R \\
 &= (I + PC_1)^{-1} P(C_1 + C_2) R
 \end{aligned}$$

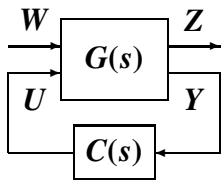
C_1 でフィードバック系のロバスト性を改善し
 C_2 で目標値追従特性を改善する... 自由度が2つある.



脱線. ポストモダン制御の問題設定



H^∞ -制御などのポストモダン制御では、制御系設計問題をある信号 $w(t)$ からある信号 $z(t)$ までの伝達関数の大きさを最小にするように、補償器 $C(s)$ を設計する



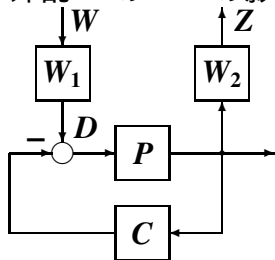
$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix}$$

$G(s)$ を一般化プラントという。
 $G(s)$ は伝達関数行列になる

$W(s)$ から $Z(s)$ までの伝達関数の大きさを H^∞ ノルムで評価し、それを最小化する設計手法を H^∞ 制御という

例. 外乱抑制制御問題の一般化プラント

外乱 D の Y への影響をなるべく小さくしたい. $R=0$ とおいてよい.



$W_1(s), W_2(s)$ は周波数重み

例. 車のサスペンション

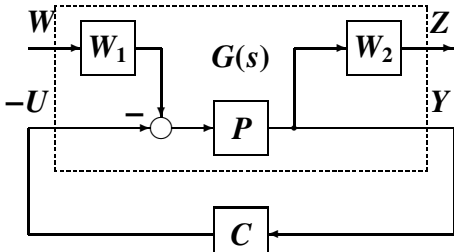
$W_1(s)$ は路面の特徴, given

$W_2(s)$ は乗り心地, spec

ポーランド, 日本, ドイツ, アメリカなど国によって路面の凹凸に特徴がある

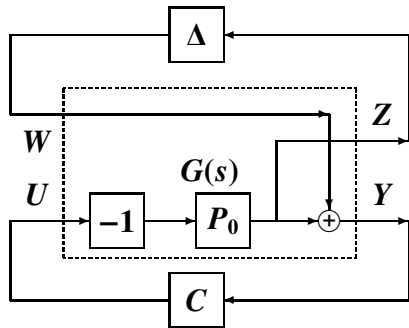
1Hz? 数 Hz の振動は酔いやすい

一般化プラント



$$G(s) = \begin{pmatrix} W_2 P W_1 & -W_2 P \\ P W_1 & -P \end{pmatrix}$$

例. ロバスト安定化問題の一般化プラント



$P(s) = P_0(s)(1 + \Delta)$ のとき, Δ の影響をなるべく受けないようにしたい.

P_0 : ノミナルモデル, 公称モデル
(線形時不変有限次元モデル)
 Δ : モデル化誤差, 乗法的誤差

一般化プラント:

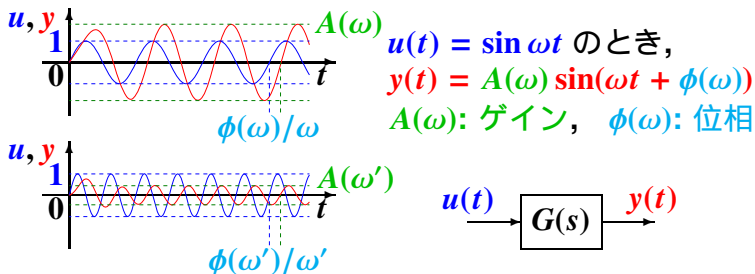
$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & -P_0 \\ 1 & -P_0 \end{pmatrix}$$

本日のまとめ(ブロック線図)

- 要素間の接続を表すため**ブロック線図**は有用
- **伝達要素**, **加算器**, **引き出し点**からなる.
- 基本的な接続: **直列接続**, **並列接続**, **フィードバック接続**
- ブロック線図の等価変換を用いると, 入力信号から出力信号までの伝達関数を求めることができる.
- **観測器標準形/可観測標準形**などによって, 伝達関数をブロック線図で表すこともできる.
- **一巡伝達関数**はフィードバック系の特性解析で重要である.
- **観測器併合系**や**2自由度制御系**など

周波数応答

- 線形システムの場合, 正弦波状信号を加え続けると, 出力が時間の経過とともに同じ周波数の正弦波状関数に落ち着く (定常応答)
- 多くの異なる周波数の正弦波状入力に対する定常応答を測定し, 入出力信号の振幅の比 (ゲイン) と位相ずれ (位相差) を蓄積することによって, システムの特性を知ることができる



SWFsmd

周波数応答の導出 (1/2)

(1) 入出力微分方程式から

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u}$$

$u(t) = e^{st}$ (s は複素定数) とおくと

$$y(t) = G(s)e^{st}$$

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s}{a_0 + a_1s + s^2}$$

(2) 畳込み積分表現から

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

定常応答を知りたいので, $t_0 \rightarrow -\infty$ とすると

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} g(\tau')u(t - \tau')d\tau' \end{aligned}$$

最後の式変換では, $\tau' = t - \tau$ とおいた. $u(t) = e^{st}$ のとき

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} g(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = G(s)e^{st} \\ G(s) &= \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned}$$

周波数応答の導出 (2/2)

$$u(t) = \cos \omega t \text{ のとき, } \left. \begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ \sin \omega t &= \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \end{aligned} \right\} \text{より}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(G(j\omega)e^{j\omega t} + G(-j\omega)e^{-j\omega t} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} G(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) \\ G(-j\omega) &= R(\omega) - jX(\omega) \end{aligned} \right\} \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= R(\omega) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + jX(\omega) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \\ &= R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t \\ &= |G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } |G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}, \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

$$\text{cf. 加法定理: } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

周波数応答線図

$G(j\omega)$ を図にプロットする

- **Bode 線図**

- **ゲイン線図**: $\log \omega$ に対して $20 \log |G(j\omega)|$ をプロット
ゲインの**デシベル (dB)** 表示
- **位相線図** : $\log \omega$ に対して $\angle G(j\omega)$ をプロット

- **Nyquist 線図 (ベクトル軌跡)**

- **($\operatorname{Re} G(j\omega)$, $\operatorname{Im} G(j\omega)$)** をプロット

- **ゲイン位相線図, ニコルス線図, ホール線図**

- 図上で解析や補償器の設計を行うためのツール
- 計算機が発達していなかった時代の遺物(?)

SWFbode

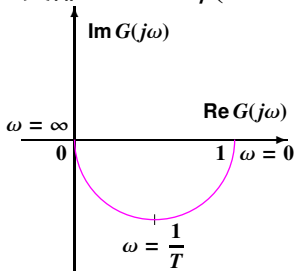
1次遅れ系のNyquist線図

伝達関数 $G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$ において $s = j\omega$ とおくと次式を得る:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

実部を $u = 1/(1 + \omega^2 T^2)$, 虚部を $v = -\omega T/(1 + \omega^2 T^2)$ とおくと

$$v/u = -\omega T \text{ より}$$



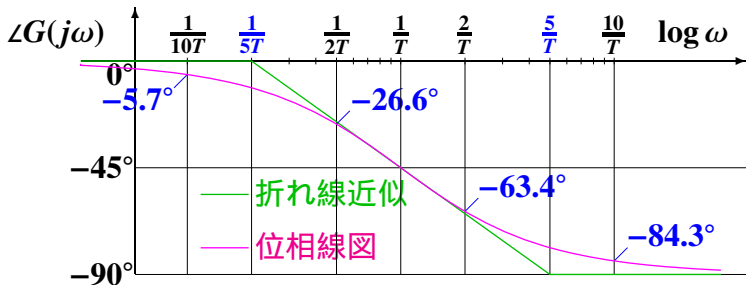
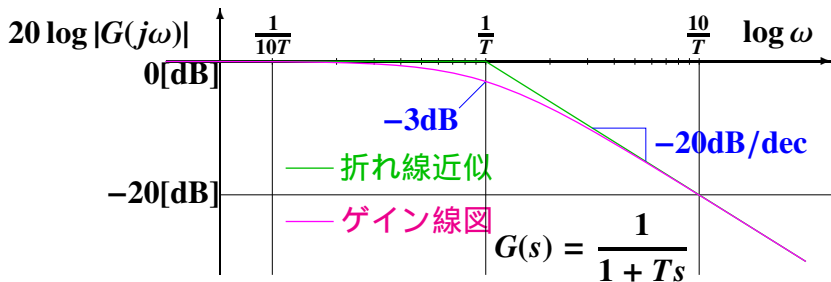
Nyquist 線図

$$u^2 + v^2 = u \Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

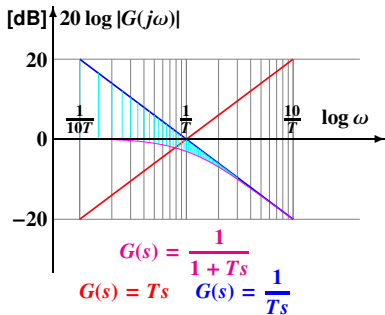
中心 $(\frac{1}{2}, 0)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円となる

$\omega = 0$ から $\omega = \infty$ まで (u, v) をプロット

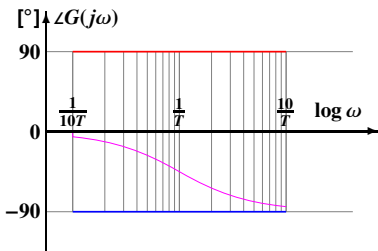
1次遅れ系のBode線図



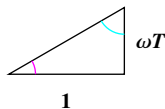
1次系のBode線図(つづき)



$$\begin{aligned}
 & \underbrace{20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ as } \omega \rightarrow 0} \\
 &= 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T} \right| - 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T} \right| + 20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| \\
 &= 20 \log \left| \frac{1}{j\omega T} \right| + \underbrace{20 \log \left| \frac{j\omega T}{1+j\omega T} \right|}_{\rightarrow 0 \text{ as } \omega \rightarrow \infty}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \angle G(j\omega) &= \angle \frac{1}{1+j\omega T} = \angle \frac{1-j\omega T}{1+\omega^2 T^2} = -\tan^{-1} \omega T \\
 &= -90^\circ + \tan^{-1} \frac{1}{\omega T} = -\tan^{-1} \omega T \\
 &= -\log \frac{1}{\omega T} = \log \omega T
 \end{aligned}$$



cf. decade

- **1dec** (1 デカード) とは, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$ となる区間 (ω_1, ω_2) のこと
例 (1, 10), (10, 100), (0.1, 1), (0.2, 2), ...

cf. **deca-** は 10, **deci-** は 1/10 のこと.

- **1 octave** (1 オクターブ) とは, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$ となる区間 (ω_1, ω_2) のこと

cf. ‘ラ’ の音と 1 オクターブ高い ‘ラ’ の音では周波数が 2 倍違う

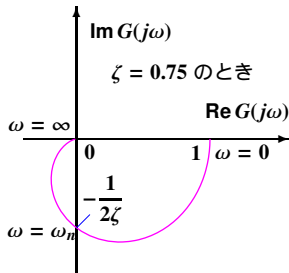
cf. 音楽では, **1octave** 間を 8 度の音階に分ける.

cf. **octo-** は 8 のこと.

2次振動系のNyquist線図

伝達関数 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$. 周波数伝達関数は

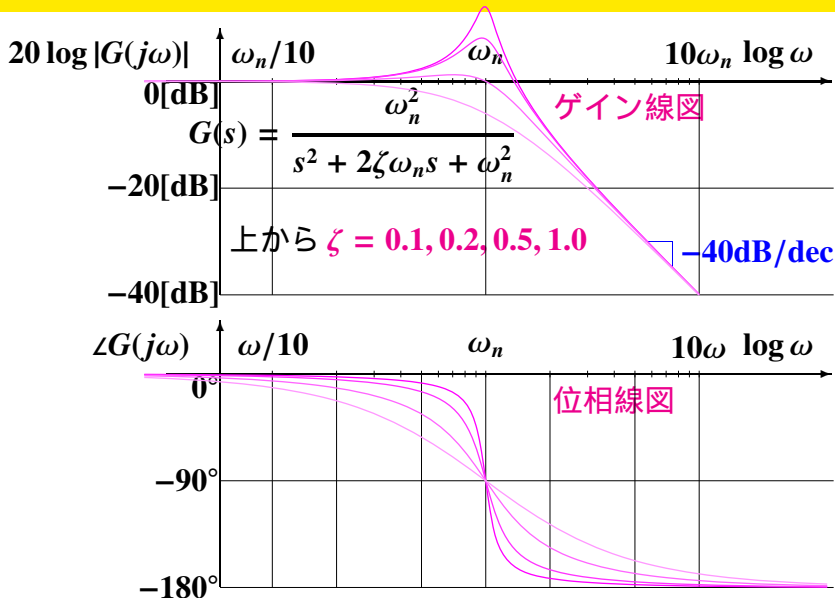
$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2j\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$



	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
$\omega \ll \omega_n$	~ 1	$\sim 0^\circ$
$\omega = \omega_n$	$= \frac{1}{2\zeta}$	$= -90^\circ$
$\omega \gg \omega_n$	$\sim \left \frac{\omega_n}{\omega}\right ^2$	$\sim -180^\circ$

Nyquist 線図

2次振動系のBode線図

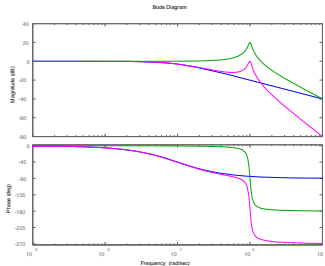


伝達関数の積の Bode 線図

$G(s) = G_1(s)G_2(s)$ のとき $G_1(s) = R_1e^{j\theta_1}$, $G_2(s) = R_2e^{j\theta_2}$ とおくと
 $G(s) = R_1R_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}$ したがって,

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \\ &= 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)| \\ \angle G(j\omega) &= \theta_1 + \theta_2 = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{aligned}$$

ゲイン線図・位相線図とも, $G_1(j\omega)$, $G_2(j\omega)$ の足し算になる



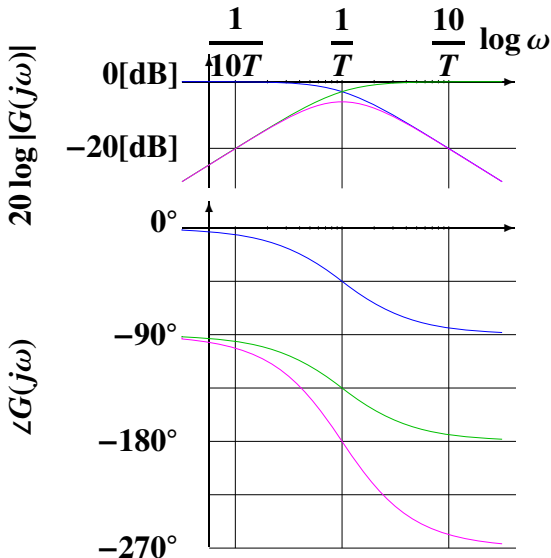
$$G_1(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

微積分回路の Bode 線図

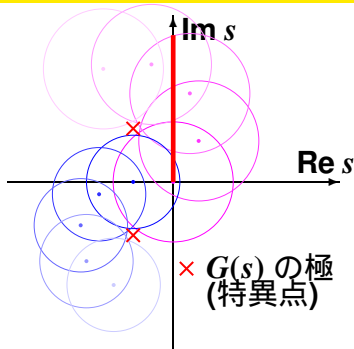
$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts} \cdot \frac{1}{1+Ts}$$



cf. なぜ虚軸上だけでよいのか?

- $G(s)$ は複素関数
- $D = \{s : |s - a| < R\}$ で正則ならば Taylor 展開可能:

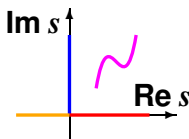
$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G^{(n)}(a)(s - a)^n$$
 $\Rightarrow G(a), G'(a), G''(a), \dots$ が分かれば $G(s)$ ($s \in D$) がわかる



- 解析接続すれば, 1点 (例えば $s = 0$) での情報から, 正則な領域での $G(s)$ の値がすべて分かる!!
- $G(j\omega)$ が分かれば, $G(0), G'(0), G''(0), G^{(3)}(0), \dots$ が分かる
 \Rightarrow 虚軸上の値だけ分かればよい

cf. それでは、実軸上だけでもよいか？

- 数学的には **O.K.**
(数学的にはどこでもよい)
工学的には **N.G.**



- $u(t) = e^{st}$, $\text{Re } s \neq 0$ だと、ゲインや位相を正確に測れない
 - $\text{Re } s < 0$ ならば $u(t)$ は指数的に減衰。
⇒ 雑音に紛れてしまう。
 - $\text{Re } s > 0$ ならば $u(t)$ は指数的に発散。
⇒ すぐに飽和してしまう。
- $u(t) = \cos \omega t$ ならば持続的にデータを取得可能

本日のまとめ (周波数応答)

- **ゲイン**と**位相**は角周波数 ω の関数となる.
- ゲインは $|G(j\omega)|$, 位相は $\angle G(j\omega)$ となる.

$$u(t) = \sin \omega t \Rightarrow y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

- **Bode 線図** (ゲイン線図, 位相線図) は制御系設計には必須.
ゲイン線図: $\log \omega$ に対する $|G(j\omega)|$ のデシベル (dB) 表示
位相線図: $\log \omega$ に対する $\angle G(j\omega)$ をプロット
- **Nyquist 線図** ($G(j\omega)$ の実部と虚部をプロット) も概念上重要
- 1次系と2次系の **Bode 線図**, **Nyquist 線図**
- 伝達関数の積の **Bode 線図**

内部安定性と入出力安定性

- 安定:物事が落ち着いていて、激しい変化のないこと (広辞苑)
→ サ行変格活用の動詞 “安定する” ↳ (cf. 天気, 物価)
- 理工学の分野では
 - 元の状態へ戻ろうとする性質を持つこと ↳ “安定な”
→ ナリ活用の形容動詞 or 主格/目的格にならない名詞
- 安定性にはいろいろな定義がある
 - 内部安定性 Lyapunov 安定, 漸近安定, 指数安定, ...
 - 入出力安定 or BIBO (Bounded Input Bounded Output) 安定,
 L_1 -安定, L_2 -安定, L_∞ -安定, L_p -安定, ...
- 制御界では, その都度, 安定性の定義を明確にしてから議論
- 非線形システムの場合, 結果は安定性の定義に依存
- 線形システムの場合は, ほぼ等価な条件となる

内部安定性

- 定義

入力を0として、システムは静止の状態(平衡状態)にあったとする。これに初期条件を与えたとき、時間の経過とともに元の平衡状態に戻れば安定、そうでなければ、不安定であると定義する。

- 例. お椀の中のビー玉と外のビー玉



(中) 一旦動いても、摩擦があるのでお椀の底に収束する。

(外) 平衡状態からちょっとでもずれると転がり落ちてしまう。

線形有限次元系の場合

- 入出力関係微分方程式より

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0 \leftarrow \text{入力は } 0 \quad (*)$$

初期条件は, $x(0), \dot{x}(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$.

- (*) 式の特解は, $x(t) = e^{\lambda t}$ という形をしている

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) e^{\lambda t} = 0, \quad e^{\lambda t} \neq 0$$

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ を (*) の特性方程式という
 特性方程式の根を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする
 (簡単のため $\lambda_i \neq \lambda_j$ if $i \neq j$ とする)

- (*) の一般解は $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$
 ここで, c_1, \dots, c_n は初期条件から定まる定数

線形有限次元系の場合(つづき)

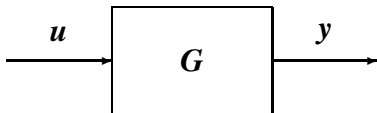
$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = \mathbf{0} \leftarrow \text{入力は } \mathbf{0} \quad (*)$$

- (*) の一般解は $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$
- 内部安定性: 任意の初期条件に対して $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ as $t \rightarrow \infty$ となるための必要十分条件

内部安定 \Leftrightarrow 任意の c_1, \dots, c_n に対して $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ as $t \rightarrow \infty$
 $\Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$

cf. 線形システムの場合, 漸近安定 \Leftrightarrow 指数安定

入出力安定性



- 定義
 入力があるとき、出力もまた有界であれば安定である
- 補足
 どのような有界入力に対しても必ず出力は有界となる, i.e.,

$$\begin{aligned} & \exists K < \infty \quad \text{s.t.} \quad |u(t)| \leq K \quad \forall t \geq 0 \\ \Rightarrow & \exists M < \infty \quad \text{s.t.} \quad |y(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つとき安定であるという

線形システムの場合

- 畳み込み積分表現より $y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau$.
($u(t) = 0$ if $t < 0$ とする.)

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau \right|$$

$$\leq \int_0^{\infty} |g(\tau)| \cdot |u(t - \tau)|d\tau \leq K \int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau$$

よって, $\int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau < \infty \Rightarrow |y(t)| < \infty \quad \forall t \geq 0$

- 逆に, $|y(t)| < \infty \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau < \infty$ (なぜか?)

- 入出力安定 $\Leftrightarrow \int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau < \infty \Rightarrow g(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$

線形有限次元システムの場合

- ところで, 伝達関数 $G(s)$ の分母多項式を因数分解し,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - s_k} \end{aligned}$$

と部分分数展開して逆ラプラス変換すると,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \sum_{k=1}^n \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c_k}{s - s_k} \right] = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t}$$

- よって, $g(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Re}[s_k] < 0 \quad \forall k.$

線形有限次元システムの場合(つづき)

伝達関数 $G(s)$ のインパルス応答:

$$g(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t}$$

- 逆に, $\text{Re}[s_k] < 0 \quad \forall k \Rightarrow$

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \int_0^{\infty} e^{s_k t} dt = - \sum_{k=1}^n \frac{|c_k|}{s_k} < \infty.$$

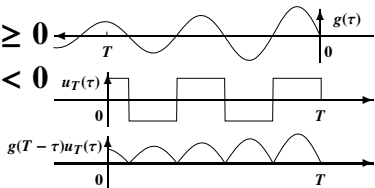
- よって, 線形システムの場合

入出力安定 $\Leftrightarrow \text{Re}[s_k] < 0 \quad \forall k \Leftrightarrow$ 内部安定

cf. $|y(t)| < \infty \Rightarrow \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau < \infty$ の証明

$$u_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq T \text{ and } g(T-t) \geq 0 \\ -1 & \text{if } 0 \leq t \leq T \text{ and } g(T-t) < 0 \\ 0 & \text{if } t > T \text{ or } t < 0 \end{cases}$$

とおくと



$$y_T(T) = \int_0^\infty g(T-\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^T |g(T-\tau)| d\tau = \int_0^T |g(t)| dt$$

$$T \rightarrow \infty \text{ とすると, } \lim_{T \rightarrow \infty} y_T(T) = \int_0^\infty |g(t)| dt = \|g\|_1.$$

すなわち, $\sup_{t \geq 0} |y(t)| = \|g\|_1 \sup_{t \geq 0} |u(t)|$ となる $u(t)$ が存在する.

よって, $\|g\|_1 = \infty$ ならば, $\sup_{t \geq 0} |y(t)| = \infty$ となる $u(t)$ が存在する.

この対偶をとると, $|y(t)| < \infty$ ならば, $\|g\|_1 < \infty$ である.

SWF $\|$ norm

cf. L_p -安定性

信号 $x(t)$ の L_p ノルムを次式で定義する.

$$\|x\|_p = \left(\int_0^{\infty} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

$G : u(\cdot) \mapsto y(\cdot) : y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau) d\tau$ となる $u(t), y(t)$ に対して, 次式が成り立つ $M < \infty$ が存在するとき, システム G は L_p -安定であるという.

$$\|y\|_p \leq M\|u\|_p \quad (*)$$

$\|u\|_p < \infty$ なる任意の $u(t)$ に対して (*) 式を満たす M の最小値を G の L_p 誘導ノルムという. $\|G\|_p = \sup_{\|u\|_p < \infty} \|y\|_p / \|u\|_p$
 $p = \infty$ のとき, $\|x\|_{\infty}$ は $\|x\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$ と定義される.

BIBO(Bounded Input Boundef Output) 安定性は L_{∞} -安定性に相当
 制御系では, L_2 -安定性もよく用いられる.

cf. ノルム

- ノルム (norm) は大きさの概念を一般化したもの
- X を K 上線形空間 (ベクトル空間とする. ただし, K は体 (field). ($K = \mathbb{C}$ or \mathbb{R}))
- 写像 $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ がつぎの 3 つの性質を満たすとき, $\|\cdot\|$ をノルムという.
 - $\|x\| > 0$ for $\forall x \in X \setminus \{0\}$
 - $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ for $\forall \alpha \in K$ and $\forall x \in X$.
 - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for $\forall x, y \in X$ (三角不等式)

例 n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n と Euclid ノルム

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

cf. ノルムの例

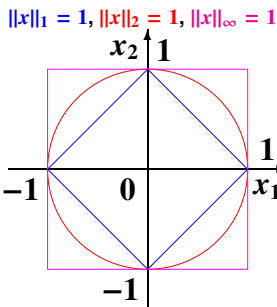
$$\mathbb{C}^n \ (x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{C}^n, x_i \in \mathbb{C})$$

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$
- $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

$$l_p \ (x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_i \in \mathbb{C})$$

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}, \ l_p = \{x : \|x\|_p < \infty\}$
- $\|x\|_\infty = \sup_{i \geq 1} |x_i|, \ l_\infty = \{x : \|x\|_\infty < \infty\}$

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ とも, $p = 2$ のとき, **Euclid ノルム**という.



cf. 誘導ノルム

- ノルム $\|\cdot\|$ の定義された空間 X を **ノルム空間** と呼び、 $(X, \|\cdot\|)$ と書く。混乱の恐れがない場合は、単に X と書くこともある。

例 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$, l_p , L_p , etc.

- X, Y をノルム空間, $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ をそれぞれのノルムとする。 $A : X \rightarrow Y : x \mapsto y = Ax$ が X から Y への線形写像のとき、

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$$

を A の **誘導ノルム (induced norm)** という。

cf. 誘導ノルムの例

例 $X = Y = \mathbb{C}^n$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ とする。

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \Rightarrow \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

列和 (column sum)

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \|A\|_2 = \max_i [\lambda_i(A^*A)]^{1/2}$$

最大特異値

(maximum singular value)

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad \Rightarrow \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

行和 (row sum)

cf. $\|A\|_\infty, \|A\|_1$ の例

簡単のため, $X = Y = \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする.

$$\begin{array}{c} y \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \sum_{j=1}^5 |a_{ij}|: \text{row sum} \\ \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

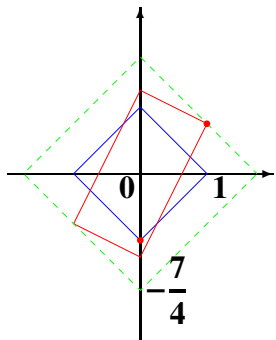
$$\|A\|_\infty = 10$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ 12 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 12 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \sum_{i=1}^5 |a_{ij}|: \text{column sum} \\ 1 \end{array}$$

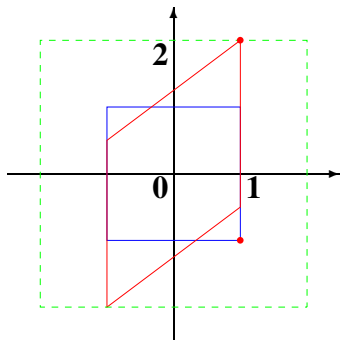
$$\|A\|_1 = 12$$

cf. 誘導ノルムの例(つづき)

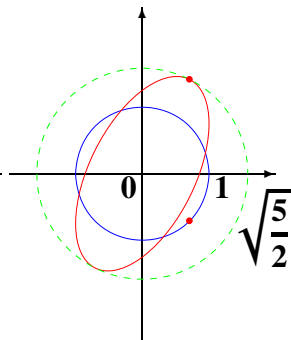
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = U \Sigma V^T$$



$$\|A\|_1 = \frac{7}{4}$$



$$\|A\|_\infty = 2$$



$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

cf. パーセバルの定理

$x(t)$ とそのフーリエ変換

$$\hat{X}(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

の間に**パーセバル (Parseval) の定理**が成り立つ。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$$

[注] $x(t) = 0$ for $t < 0$ のとき,

$$\hat{X}(\omega) = X(j\omega)$$

ただし, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$.

[証明]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(\omega) \hat{X}(\omega)^* d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{X}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{j\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{X}(\omega) e^{j\omega t} \right) x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt \quad (\text{反転公式}) \end{aligned}$$

cf. パーセバルの定理(つづき)

- パーセバルの定理はフーリエ変換のユニタリ性に関する定理
ユニタリ作用素とは、内積が不変な全射のこと。(ノルムも不変)

- 離散フーリエ変換 (DFT) についても成り立つ
DFT は本質的にはフーリエ級数展開と同じ

- 一般の正規直交関数系 $\{\phi_n\}$ による展開: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(t)$, $c_n = \langle x, \phi_n \rangle$ では,

ベッセル (Bessel) の不等式: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|x\|^2 := \langle x, x \rangle$ が成り立つ

- $\{\phi_n\}$ が完全ならば、パーセバルの等式: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2$ が成り立つ。

cf. $x \in L^2(-T/2, T/2)$ が、 $\langle x, \phi_n \rangle = 0$ for $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を満たすとき、 $(-T/2, T/2)$ のほとんどいたるところで、 $x(t) = 0$ ならば、直交系 $\{\phi_n\}$ は完全であるという。

cf. フーリエ級数展開は、直交関数系 $\left\{ e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \right\}$ と、内積 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \overline{y(t)} dt$ による展開

cf. $\left\{ e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \right\}$ は完全。 $\hookrightarrow \overline{y(t)}$ は $y(t)$ の複素共役。

- パーセバルの等式は、内積空間におけるピタゴラスの定理 (Pythagorean theorem)。

cf. 伝達関数 $G(s)$ の L_2 -誘導ノルム

パーセバルの等式を用いて, $\|y\|_2^2$ の上界を求める.

$$\begin{aligned}
 \|y\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \cdot |U(j\omega)|^2 d\omega \\
 &\leq \|G\|_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega \\
 &= \|G\|_{\infty}^2 \cdot \|u\|_2^2
 \end{aligned}$$

ここで, $\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$.

$G(s)$ の L_2 誘導ノルムは, 明らかに, $\|G\|_{\infty}$ 以下.

cf. 伝達関数 $G(s)$ の L_2 -誘導ノルム(つづき)

$\omega = \omega_0$ で $|G(j\omega_0)| = \|G\|_\infty$ となる ω_0 を選び, $U(j\omega)$ を次式とおく.

$$U(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}}, & \text{if } |\omega - \omega_0| \leq \varepsilon \\ & \text{or } |\omega + \omega_0| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ここで, $\varepsilon > 0$ は小定数. このとき, $\|u\|_2 = 1$. 一方, $\|y\|_2$ は

$$\begin{aligned} \|y\|_2 &\approx \frac{|G(-j\omega_0)|^2\pi + |G(j\omega_0)|^2\pi}{2\pi} \\ &= |G(j\omega_0)|^2 = \|G\|_\infty \end{aligned}$$

($\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, $\|y\|_2$ はいくらでも $\|G\|_\infty$ に近づく.) よって, $G(s)$ の L_2 誘導ノルムは $\|G\|_\infty$.

cf. L_1 -誘導ノルム ($y = Gu$)

$$\begin{aligned}
\|y\|_1 &= \int_0^\infty |y(t)| dt = \int_0^\infty \left| \int_0^t g(t-\tau)u(\tau) d\tau \right| dt \\
&\leq \int_0^\infty \int_0^t |g(t-\tau)| \cdot |u(\tau)| d\tau dt \\
&= \int_0^\infty \int_\tau^\infty |g(t-\tau)| \cdot |u(\tau)| dt d\tau \quad (\text{積分順番の入替}) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty |g(t')| \cdot |u(\tau)| dt' d\tau \quad (t' = t - \tau) \\
&= \int_0^\infty |g(t')| dt' \int_0^\infty |u(\tau)| dt' d\tau = \|g\|_1 \cdot \|u\|_1
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{よって, } \|G\|_1 \leq \|g\|_1 \\ \text{一方, } u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g(t) \Rightarrow \|G\|_1 \geq \|g\|_1. \end{array} \right\} \Rightarrow \|G\|_1 = \|g\|_1.$$

cf. $y = Gu$ の和分近似

刻み幅 $h > 0$ を十分小さな正数とする.

$y_n = y(nh)$, $u_n = u(nh)$, $g_n = g(hn)$ とおくと,

$$y_n = \int_0^{nh} g(t - \tau)u(\tau) d\tau \sim h \sum_{i=0}^n g_{n-i}u_i$$

$$y \sim \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} g_0 & & & \\ g_1 & g_0 & & \\ g_2 & g_1 & g_0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = Gu$$

$\|G\|_1$ (G の L_1 誘導ノルム) は, $\|G\|_1$ (G の行列 1 ノルム),

$\|G\|_\infty$ (G の L_∞ 誘導ノルム) は, $\|G\|_\infty$ (G の行列 ∞ ノルム) に対応.

G の特殊な構造 (Toeplitz 行列という) から,

$$\|G\|_1 = \|G\|_\infty = h \sum_{i=0}^{\infty} |g_i|$$

本日のまとめ (安定性)

- 内部安定性と入出力安定性 (BIBO 安定性) という概念を紹介
- 線形有限次元システムの場合, 両者は等価な条件となる
伝達関数のすべての極の実部が負
- BIBO 安定性は, L_p -ノルムを用いて, L_p -安定性に拡張できる.
- L_p -安定性は信号の大きさを L_p -ノルムで計り, 伝達関数の大きさを L_p -誘導ノルムによって計る.
- BIBO 安定性は L_∞ -安定性に相当
 L_∞ -誘導ノルムはインパルス応答の L_1 -ノルム.
- L_2 -誘導ノルムは伝達関数の H_∞ ノルム.
 H_∞ 制御理論は, L_2 -安定性に基づいた制御理論である.

Routh-Hurwitz の安定判別法

- 線形システムが安定 \Leftrightarrow 伝達関数のすべての極の実部が負
 - cf. 伝達関数の分母=0 となる根を**極**という
伝達関数の分子=0 となる根を**零点**という
- $s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = 0$ となる s の実部?
 - $n \geq 5$ のとき, 一般には有限回の代数演算と開平で根を求めることはできない. \Rightarrow 数値計算
 - 現在では, 計算機で簡単に求めることができる.
- すべての極の実部が負か否かを判定するだけなら有限回の代数演算で可能!!
 - **Routh** の方法と **Hurwitz** の方法がある.
 - 両者は本質的に同じ
- すべての根の実部が負となる多項式を **Hurwitz 多項式** という

Routh の安定判別法

$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n = 0$ に対して次の Routh 表を作成する

s^n	$r_{n0} = a_0$	$r_{n1} = a_2$	$r_{n2} = a_4$	\dots	$r_{n\lfloor n/2 \rfloor}$
s^{n-1}	$r_{(n-1)0} = a_1$	$r_{(n-1)1} = a_3$	$r_{(n-1)2} = a_5$	\dots	
s^{n-2}	$r_{(n-2)0}$	$r_{(n-2)1}$	$r_{(n-2)2}$	\dots	
s^{n-3}	$r_{(n-3)0}$	$r_{(n-3)1}$	$r_{(n-3)2}$	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots			
s^3	r_{30}	r_{31}	$r_{ik} = -\frac{1}{r_{(i+1)0}} \begin{vmatrix} r_{(i+2)0} & r_{(i+2)(k+1)} \\ r_{(i+1)0} & r_{(i+1)(k+1)} \end{vmatrix}$ $= r_{(i+2)(k+1)} - \frac{r_{(i+2)0}}{r_{(i+1)0}} r_{(i+1)(k+1)}$		
s^2	r_{20}	r_{21}			
s^1	r_{10}				
s^0	r_{00}				
\vdots	\vdots				

$r_{n0}, r_{(n-1)0}, r_{(n-2)0}, \dots, r_{30}, r_{20}, r_{10}, r_{00}$ を Routh 数列という

システムが安定 \Leftrightarrow Routh 数列に符号の変化がない

Routh 安定判別法の例

例. $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & a_0 & a_2 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & a_2 & \end{array}$$

システムが安定

$$\Leftrightarrow a_0, a_1, a_2 > 0 \text{ or} \\ a_0, a_1, a_2 < 0$$

例. $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & a_0 & & a_2 \\ s^2 & a_1 & & a_3 \\ s^1 & a_2 - a_0a_3/a_1 & & \\ s^0 & a_3 & & \end{array}$$

システムが安定



$$a_0, a_1, a_3, a_2 - a_0a_3/a_1 > 0 \text{ or} \\ a_0, a_1, a_3, a_2 - a_0a_3/a_1 < 0$$

一般に a_0, a_1, \dots, a_n は同符号でないと不安定

Hurwitz の安定判別法

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$H_n = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & \cdots & H_n \\ \hline a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots & \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots & \\ \hline & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & & \cdots & \\ \hline & & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & & & \\ & & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

H_n の首座小行列式がすべて同符号 (正) \Leftrightarrow Hurwitz 多項式

Hurwitz 安定判別法の例 ($n = 4$ の場合)

$$H_1 = a_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\ = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ = a_3 H_2 - a_1^2 a_4 > 0$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \\ = H_3 a_4 > 0$$

Routh 安定判別法との関係

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & a_0 & a_2 & a_4 \\ s^3 & a_1 & a_3 & 0 \\ s^2 & H_2/H_1 & a_4 & \\ s^1 & H_3/H_2 & & \\ s^0 & H_4/H_3 & & \end{array}$$

n 次多項式の Routh 数列は

$$\left(a_0, a_1, \frac{H_2}{H_1}, \dots, \frac{H_n}{H_{n-1}} \right)$$

cf. Euclid の互除法

- 2つの自然数 f_0, f_1 , ($f_0 \geq f_1$ とする) の最大公約数を求めよ.
- f_0 を f_1 で割る. $f_0 = qf_1 + r$. q は商, r は余り.
- 余りを $f_2 = r < f_1$ とおく.
- f_1 を f_2 で割った余りを $f_3 < f_2$ とする.
- 一般に, $f_{i-1} = q_i f_i + f_{i+1}$, for $i = 1, 2, \dots$, \rightarrow 公約数
- f_{k-1} が f_k で割りきれた ($f_{k+1} = 0$) とき, f_k は f_0 と f_1 の最大
- 例: **756** と **240** の最大公約数はつぎの計算より **12**(= f_4)

$$f_0 = 756 = 3 \times 240 + 36$$

$$f_1 = 240 = 6 \times 36 + 24$$

$$f_2 = 36 = 1 \times 24 + 12$$

$$f_3 = 24 = 2 \times 12$$

cf. Euclid の互除法 (多項式版)

- 2つの多項式 $f_0(s)$, $f_1(s)$ の最大共通因子を求めよ。
ただし, $\deg f_0(s) \geq \deg f_1(s)$ とする
- $f_{i-1}(s)$ を $f_i(s)$ で割った余りを $f_{i+1}(s)$ とする。

$$f_{i-1}(s) = q_i(s)f_i(s) + f_{i+1}(s), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots$$

このとき, $\deg f_{i+1}(s) < \deg f_i(s)$ for $i = 1, 2, \dots$

- $f_{k-1}(s)$ が $f_k(s)$ で割りきれた ($f_{k+1}(s) = 0$) とき,
 $f_k(s)$ は $f_0(s)$ と $f_1(s)$ の最大共通因子

cf. Euclid の互除法 (多項式版) の例

$s^4 - 5s^2 + 4$ と $s^3 + 5s^2 + 7s + 3$ の最大共通因子は $s + 1$

$$s^4 - 5s^2 + 4 = (s - 5)(s^3 + 5s^2 + 7s + 3) + 13s^2 + 32s + 19$$

$$s^3 + 5s^2 + 7s + 3 = \frac{1}{13^2}(13s + 33)(13s^2 + 32s + 19) + \frac{120}{13^2}(s + 1)$$

$$13s^2 + 32s + 19 = \frac{13^2}{120}(13s + 19) \frac{120}{13^2}(s + 1)$$

cf. Sturm の問題

- 実係数を持つ代数方程式 ((多項式) = 0)

$$f(x) = 0$$

が与えられた区間

$$a \leq x \leq b$$

の中にいくつの実根をもつかを決定する問題

- 根の絶対値の限界 R はわかる \Rightarrow
 $-R < x < R$ における実根の数を求めると, それが実根の総数
- 区間を次第に細分していくことにより, 実根の近似的計算ができる.
- **Sturm** の問題は, **Euclid** の互除法によって解かれる.

cf. Sturm の定理

- $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$ とおき,
 $f_{i-1}(x)$ を $f_i(x)$ で割った余りの符号反転を $f_{i+1}(x)$ とおく

$$f_{i-1}(x) = q_i(x)f_i(x) - f_{i+1}(x)$$

- $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x)$ で符号反転する回数を $V(x)$ とおく
 列の中に 0 のものがあれば、飛ばして $V(x)$ を数える.
- $f(x) = 0$ の区間 $a < x \leq b$ における実根の数を N_0 とする.
 (ただし, 重複根は 1 つの根と数える.)
- このとき, $N_0 = V(a) - V(b)$
- $x = a$ が $f(x) = 0$ の l 重根の場合, $(x - a)^{l-1}$ で割った上で,
 $V(a)$ を求める. $x = b$ についても同様.

cf. $f(x) = (x - x_0)^l \phi(x) \Rightarrow f' = (x - x_0)^{l-1} \{(x - x_0)\phi' + l\phi\}$
 $(x - x_0)^{l-1}$ は $f(x)$ と $f'(x)$ の共通因子

cf. Sturm の定理の例

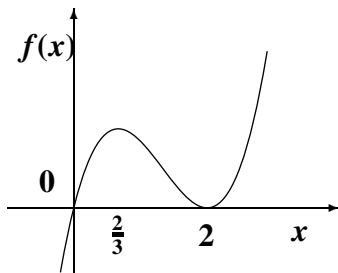
$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$= x(x-2)^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$= (3x-2)(x-2)$$

$$f_2(x) = \frac{8}{9}(x-2)$$



x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f_2(x)$	-	-	-	-	-	0	+
$V(x)$	2	1	1	1	1	0	0

$V(-\infty) - V(\infty) = 2$ 個の実根をもつ

cf. Sturm の定理の証明

- x が a から b まで動くとき, $V(x)$ の数が変化するのは, $f_i(x) = 0$ となる点を通過するときに限る. (多項式の連続性より)
- $f(x) = 0$ となる x_0 において $V(x)$ の数は一つ減る.
 - $f(x) = (x - x_0)^l \phi(x)$ なら $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{l}{x - x_0} + \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$
 右辺第 1 項は, x_0 の前後で $-\infty$ から $+\infty$ へ変化
 右辺第 2 項は, $\phi(x_0) \neq 0$ なので有界.
 よって, $f(x)f'(x)$ の符号は, x_0 の前後で $-$ から $+$ に変わる.
 $\Leftrightarrow f_0(x)$ と $f_1(x)$ の間で $V(x)$ の数が一つ減る.
cf. 数値例で, $x = 0, x = 2$ の前後をみよ.
 - $f_{i-1}(x) = q_i(x)f_i(x) - f_{i+1}(x)$ より, $f_i(x_1) = 0$ のとき,
 x_1 の近傍で $f_{i-1}f_{i+1} < 0$ (x_1 は $f(x)$ の重根ではないと仮定)
 f_i の符号は f_{i-1} か f_{i+1} のどちらかの符号と等しい.
 よって, f_{i-1}, f_i, f_{i+1} の間の符号の変化の数に増減はない.
- よって, 定理は証明された. (x_1 が $f(x)$ の重根の場合は?)

cf. Sturm の定理の拡張

- 2つの任意多項式 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\deg f_0(x) \geq \deg f_1(x)$.

$$f_{i-1}(x) = q_i(x)f_i(x) - f_{i+1}(x) \quad i = 1, \dots, k$$

- $i \geq 1$ では, $f_i(x_1) = 0$ となる x_1 の前後で $V(x)$ に変化はない

- $f_0(x)/f_1(x) = 0$ なる $x = x_0$ の前後でつぎの3つに場合分け

(1) $\frac{f_0(x)}{f_1(x)}$ は符号を変えない. $\Rightarrow \chi(x_0) = 0$ と定義

(2) $\frac{f_0(x)}{f_1(x)}$ は - から + に変わる. $\Rightarrow \chi(x_0) = 1$ と定義

(3) $\frac{f_0(x)}{f_1(x)}$ は + から - に変わる. $\Rightarrow \chi(x_0) = -1$ と定義

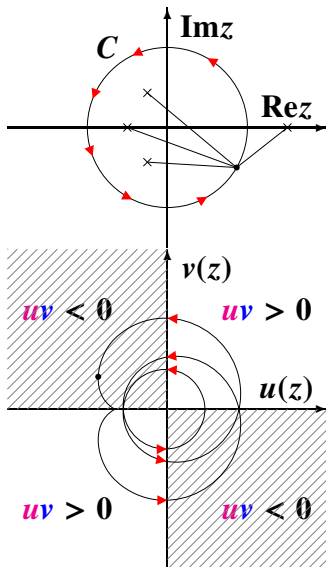
- $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$ ならば, $V(a) - V(b) = \sum_{x_0 \text{ s.t. } f_0(x_0)=0} \chi(x_0)$

- $f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x)$ の場合, (2) のみ起こり得た

cf. 虚根に関する Sturm の問題

- 単純な閉曲線 C の内部にある $f(z) = 0$ の根の数を N とする.
また, C 上には根はないとする.
- z が C 上を正の向きに一周するとき, $\angle f(z)$ は $2\pi N$ だけ増加する.
 $\Leftrightarrow f(z)$ は原点を N だけ回る.
- $f(z)$ の実部と虚部を $u(z)$, $v(z)$ と表す. $f(z) = u(z) + jv(z)$
- $u(z) = 0$ となる z の前後で, $u(z)v(z)$ の符号は $+$ から $-$ へ正味 $2N$ 回変わる.
- $f_0(z) = u(z)$, $f_1(z) = v(z)$ とすると

$$N = -\frac{1}{2} \sum \chi$$



cf. 虚根に関する Sturm の問題 (つづき)

- 閉曲線 C を中心 z_0 , 半径 r の円周とすると

$$z = z_0 + r \frac{t^2 - 1 - 2tj}{t^2 + 1} = z_0 + r \frac{t - j}{t + j}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

- $f(z) = \frac{\varphi(t) + j\psi(t)}{(t+j)^n}$. $\varphi(t), \psi(t)$ は t の高々 n 次式
- $t = -\infty \sim +\infty$ のとき, $\angle(\varphi(t) + j\psi(t))$ の増加は $-\pi \sum \chi'$.
 χ' は $\varphi(t)/\psi(t)$ の符号の変化に関して前と同様に定義.
- $f_0(t) = \varphi(t), f_1(t) = \psi(t)$ として, $V(t)$ をつくと,

$$V(-\infty) - V(\infty) = \sum \chi'$$

- $\angle(t + j)^n$ の増加分 $-n\pi$ を引けば $\angle f(z)$ の増加分を得るので,

$$N = \frac{V(\infty) - V(-\infty) + n}{2}$$

cf. 安定根の個数について

- 実係数 n 次代数方程式 $f(s) = 0$.
- N : 実部が負となる根の個数. P : 実部が正となる根の個数
- $f_0(\omega) = u(\omega)$, $f_1(\omega) = v(\omega)$, $j^{-n} f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$.
 $f_{i-1}(\omega) = q_i(\omega)f_i(\omega) - f_{i+1}(\omega) \quad i = 1, \dots, k$

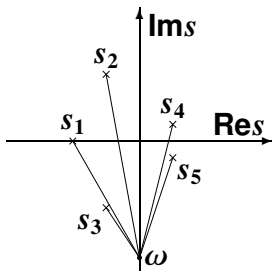
- f_0, \dots, f_k から $V(\omega)$ を求めると

$$N = \frac{1}{2}\{n + V(\infty) - V(-\infty)\}$$

$$P = \frac{1}{2}\{n + V(-\infty) - V(\infty)\}$$

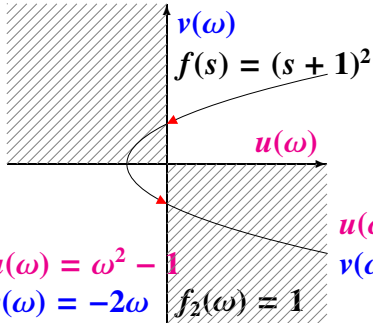
- 証明: $f(j\omega)$ は $\omega = -\infty \sim \infty$ で
 原点を $\frac{1}{2}(N - P)$ 回だけまわる.
 $\Leftrightarrow V(\infty) - V(-\infty) = N - P$
 および, $N + P = n$ より明らか.

$$f(s) = a \sum_{i=1}^n (s - s_i), \quad a \neq 0 \Rightarrow \angle f(s) = \angle a + \sum_{i=1}^n \angle (s - s_i)$$



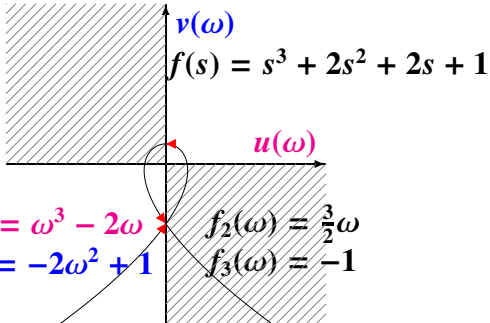
cf. 多項式の偏角と安定根の関係の例

偶数次の場合



ω	-2	-1	0	1	2
$f_0(\omega)$	+	0	-	0	+
$f_1(\omega)$	+	+	0	-	-
$f_2(\omega)$	+	+	+	+	+
$V(\omega)$	0	0	1	1	2

奇数次の場合



ω	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	2
$f_0(\omega)$	-	0	+	0	-	0	+
$f_1(\omega)$	-	-	0	+	0	-	-
$f_2(\omega)$	-	-	-	0	+	+	+
$f_3(\omega)$	-	-	-	-	-	-	-
$V(\omega)$	0	0	1	1	2	2	3

cf. Routh の安定判別法との関係 (1/2)

$f(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots$ を $j^{-n}f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$ と分けると,

$$\begin{aligned} u(\omega) = f_0(\omega) &= a_0\omega^n - a_2\omega^{n-2} + a_4\omega^{n-4} - a_6\omega^{n-6} + \dots \\ &= r_{n0}\omega^n - r_{n1}\omega^{n-2} + r_{n2}\omega^{n-4} - r_{n3}\omega^{n-6} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\omega) = f_1(\omega) &= -a_1\omega^{n-1} + a_3\omega^{n-3} - a_5\omega^{n-5} + \dots \\ &= -r_{(n-1)0}\omega^{n-1} + r_{(n-1)1}\omega^{n-3} - r_{(n-1)2}\omega^{n-5} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\omega) &= \left(a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3 \right) \omega^{n-2} - \left(a_4 - \frac{a_0}{a_1}a_5 \right) \omega^{n-4} + \dots \\ &= r_{(n-2)0}\omega^{n-2} - r_{(n-2)1}\omega^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(\omega) &= - \left(r_{(n-1)1} - \frac{r_{(n-1)0}}{r_{(n-2)0}}r_{(n-2)1} \right) \omega^{n-3} + \dots \\ &= -r_{(n-3)0}\omega^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

$r_{(n-i)l}$ は Routh 表の係数

cf. Routh の安定判別法との関係 (2/2)

- $f_i(\omega)$ は Routh 表の係数 $r_{(n-i)l}$ を使って表すことができる。

$$f_i(\omega) = (-1)^i r_{(n-i)0} \omega^{n-i} + (-1)^{i+1} r_{(n-i)1} \omega^{n-i-2} + \dots$$

$$= \sum_{l=0}^{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} (-1)^{i+l} r_{(n-i)l} \omega^{n-i-2l}$$

- Routh 数列 $\{r_{(n-i)0}\}$ が同符号ならば, $V(\infty) = n$, $V(-\infty) = 0$.
すなわち, 実部が負の根の個数は

$$N = \frac{1}{2} \{n + V(\infty) - V(-\infty)\} = n \Rightarrow f(s) \text{ は Hurwitz}$$

- $\{r_{(n-i)0}\}$ が同符号でないなら, $V(\infty) < n$ and $V(-\infty) > 0$.

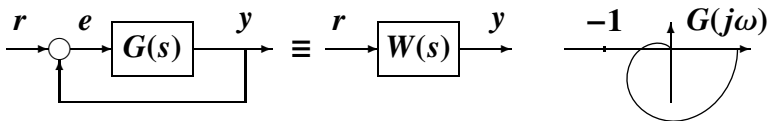
$$N = \frac{1}{2} \{n + V(\infty) - V(-\infty)\} < n \Rightarrow f(s) \text{ は Hurwitz でない}$$

- よって, Routh の安定判別法は証明された。

本日のまとめ (Routh-Hurwitz)

- 有限回の代数演算によって安定性を判別する **Routh の安定判別法** と **Hurwitz の安定判別法** を紹介
- 両者は本質的に等価
- **Routh** の安定判別法の証明法はいくつか存在する。
虚根に関する **Sturm の問題** を応用した証明法は面白い
- **Sturm** の問題は, 実係数代数方程式が, 与えられた区間の中に実根をいくつもつかを決定する問題
Sturm の問題は, **Euclid** の互除法を用いて解かれる。
- 現在では, 伝達関数の根は数値的に簡単に求められる。

Nyquist の安定判別法



- 一巡伝達関数 $G(s)$ のベクトル軌跡が与えられたとき、閉ループ伝達関数 $W(s)$ の安定性を判別する
- Nyquist の安定判別法は、単に閉ループ系が安定か不安定かを教えるだけでなく、安定の度合い(安定余裕)も与える。
- 安定余裕として、ゲイン余裕, 位相余裕が定義されている
- 安定余裕の考え方は、実際の制御系設計で威力を発揮

SWFbode

cf. 留数の定理

- 留数 (residue)

$$\text{Res}[f; a] := \frac{1}{2\pi j} \int_C f(z) dz,$$

C は a 以外に $f(z)$ の特異点を内部にもたない, 単純な閉曲線

- ローラン展開 (Laurant Expansion)

$R_1 < |z - a| < R_2$ で $f(z)$ は正則とすると,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

特に, $\text{Res}[f, a] = c_{-1}$.

- 留数の定理

$$\int_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{a_i \in D} \text{Res}[f; a_i]$$

C は単純な閉曲線, D は C で囲まれた領域

SWFargument

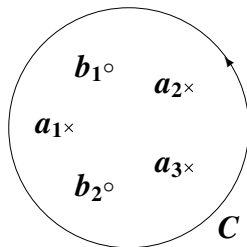
cf. 偏角の原理

- 偏角の原理は留数の定理の応用

- 偏角の原理

$$f(z) = \frac{(z - b_1)^{h_1} \cdots (z - b_m)^{h_m}}{(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_n)^{k_n}} \text{ のとき}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^m h_i - \sum_{j=1}^n k_j$$



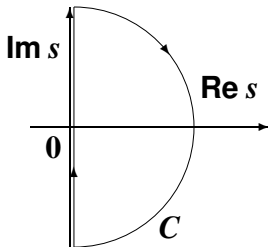
- 上式左辺の積分は対数関数になるので,

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \log f(z) = \log |f(z)| + j\angle f(z)$$

z が C 上を一周するとき, $f(z)$ が原点を反時計回りにまわる回数
 z が C 上を一周して元の値に戻ってくると, 絶対値 $|f(z)|$ は同じで偏角 $\angle f(z)$ だけが 2π の整数倍だけ異なる

Nyquist 安定判別法の導出

- C を複素右半平面を時計回りに一周する閉曲線とする (負の向き!)
- $G(s)$ の不安定極の個数を p 個とする
- $W(s)$ の極 $\Leftrightarrow 1 + G(s)$ の零点
- $G(s)$ の極 $\Leftrightarrow 1 + G(s)$ の極



$W(s)$ が安定 $\Leftrightarrow 1 + G(s)$ は右半面に零点をもたない

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{(1 + G(s))'}{1 + G(s)} ds = p$$

$\Leftrightarrow 1 + G(s)$ が原点を反時計回りに p 回まわる

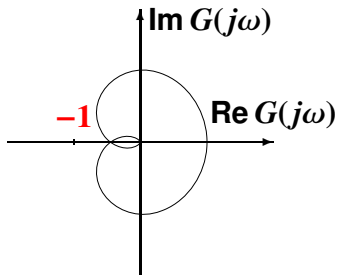
$\Leftrightarrow G(s)$ が $(-1, j0)$ を反時計回りに p 回まわる

$\Leftrightarrow G(j\omega)$ が -1 を反時計回りに p 回まわる

Simplified Nyquist Criterion

- $G(s)$ が安定なとき,

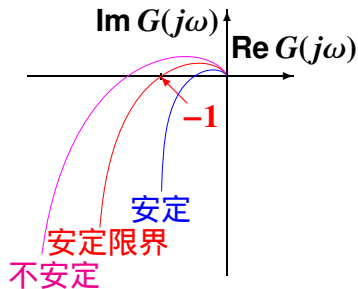
$G(j\omega)$ は -1 を回らない \Leftrightarrow 閉ループ系は安定



$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 1.8s^2 + 1.8s + 1}$$

の Nyquist 線図

-1 を回っていないので
閉ループ系は安定



SWFnyquist1

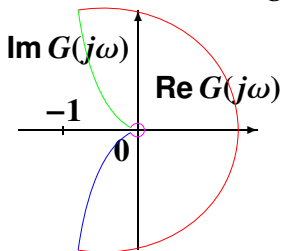
$G(s)$ が虚軸上に極をもつ場合

- 複素右半面を回る閉曲線を修正して、虚軸上の極を右側に避けて通るようにする (indentation)

- $s = \epsilon e^{j\theta}$, $\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ とする。

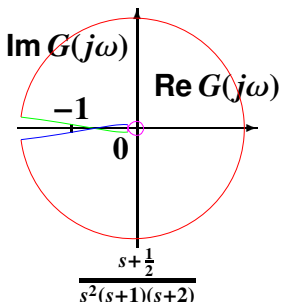
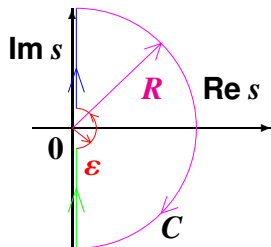
- $G(s) = 1/s(1+s)$ のとき、

$$G(s) = \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}(1 + \epsilon e^{j\theta})} \sim \frac{1}{\epsilon} e^{-j\theta}$$



- s が赤い曲線上を動くとき、 $G(s)$ は右側を回る (左図)

- -1 を回らないので閉ループ系は安定



SWFnyquist2

SWFnyquist3

SWFnyquist4

フィードバック系の安定余裕

一巡伝達関数 $G(s)$ のベクトル軌跡 or Nyquist 線図が $(-1, j0)$ からどのくらい離れているか?

位相交点:

$\angle G(j\omega_P) = -180^\circ$ となる点

ω_P : 位相交叉角周波数

ゲイン交点:

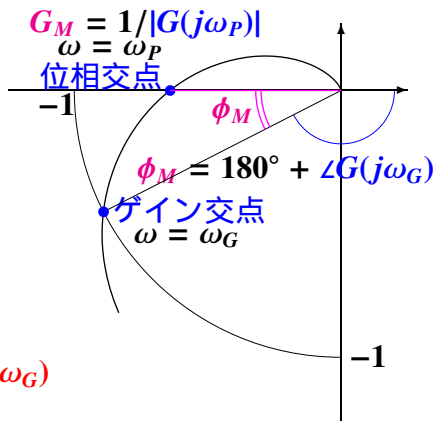
$|G(j\omega_G)| = 1$ となる点

ω_G : ゲイン交叉角周波数

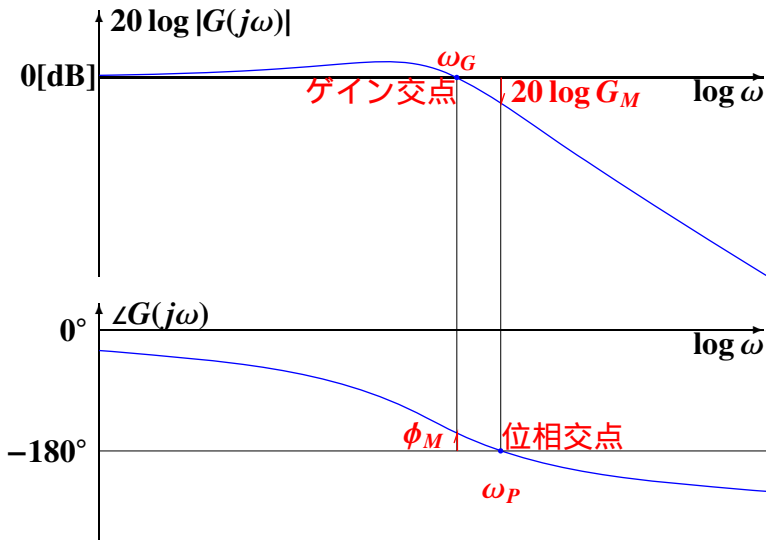
ゲイン余裕 : $G_M = 1/|G(j\omega_P)|$

位相余裕 : $\phi_M = 180^\circ + \angle G(j\omega_G)$

それぞれ大きい方が安定度が高い



Bode 線図上の安定余裕

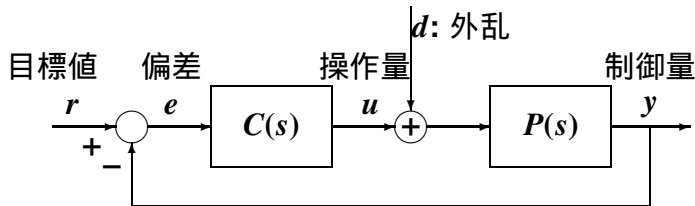


本日のまとめ (Nyquist の安定判別法)

- **Nyquist 安定判別法:**
 - 一巡伝達関数から閉ループ系の安定性を判別
- **Nyquist 安定判別法は偏角の原理**の応用である
- 単純化された **Nyquist 安定判別法:**
 - 一巡伝達関数が安定な場合の判別法
- 一巡伝達関数が虚軸に極を持つ場合にも対応可能である
- **ゲイン余裕, 位相余裕**
位相交点, 位相交叉角周波数,
ゲイン交点, ゲイン交叉角周波数,
- **Bode 線図上の安定余裕**

PID制御

- 出力の比例 (**P**), 積分 (**I**), 微分 (**D**) をフィードバック
- 世の中でもっとも一般的に使われている補償器
- 定値目標値への追従, 定値外乱の除去
- **I-PD** 補償器などのバリエーションもある



$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \epsilon s} \right) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \epsilon s}$$

P動作, I動作

P(Proportional) 動作:

$$u(t) = k_P e(t)$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

だけでは**オフセット (定常偏差)**が残ってしまう

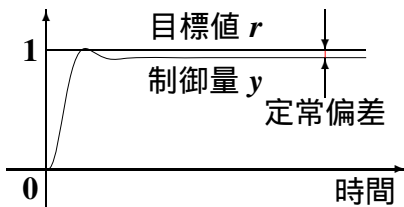


図 ステップ応答と定常偏差

I(Integral) 動作:

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \text{or} \quad U(s) = \left(k_P + \frac{k_I}{s} \right) E(s)$$

も加ると, 定常偏差を取り除くことができる
 一定目標値への完全な追従, 定値外乱の完全な除去
 y が r に届かないと, u はだんだん大きくなる.
 $y = r$ になったら, u はそのときの値を保持する

D動作

D(Differential) 動作:

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \dot{e}(t), \quad \text{or}$$

$$U(s) = \left(k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s \right) E(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) E(s)$$

- 出力が位置の場合, 速度をフィードバック
出力が速度の場合, 加速度をフィードバック
- ある周波数領域の位相を進めて安定余裕を確保
- 実際には信号を微分できないので近似微分を使う:

$$\frac{T_D s}{1 + \varepsilon s}, \quad \text{or} \quad \frac{T_D s}{1 + 2\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2}$$

- 雑音の影響を受けやすく T_D や ε を自由に選べない

cf. サーボ系と内部モデル原理

サーボ系

- 外乱が存在しても、制御量が目標値に定常偏差なく追従するシステム
- **内部モデル原理**に基づき、目標値発生器と同じ極を補償器にもたせ、閉ループ系を安定にするように、補償器のパラメータを決定する。

内部モデル原理: 開ループ系が目標値発生器の極と同じ極をもち、かつ、閉ループ系が漸近安定の場合に限って、**定常偏差**はゼロとなる。



目標値信号

ステップ



目標値発生器

$$\frac{1}{s}$$

ランプ



$$\frac{1}{s^2}$$

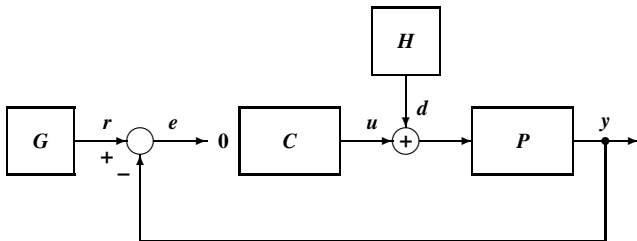
正弦波



$$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \text{ or } \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

内部モデル原理 (つづき)

応用: 下図の場合はどうなるか?



外乱 d もステップ, ランプ, 正弦波などの場合, 内部モデル原理はどうなるか?

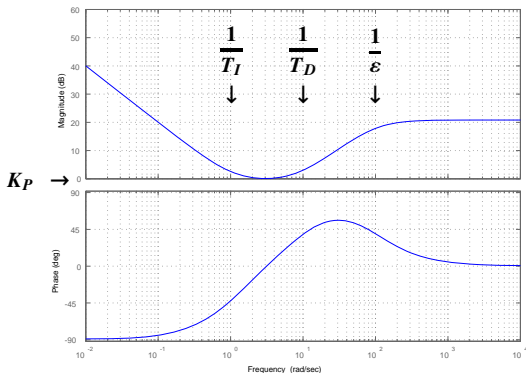
C または P は G と同じ極をもち, さらに, C は H と同じ極をもち, かつ, 閉ループ系が漸近安定の場合に限って, 定常偏差はゼロとなる.

PID 補償器の Bode 線図

PID 補償器:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \varepsilon s} \right) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \varepsilon s}$$

Bode Diagram



I-PD 制御系

- 北森は、操作量の急激な変化を避けるため、**I-PD 制御系**を提案
- 部分的モデルマッチング法 (ゲインの決め方) も提案
- さらに、**参照モデル (望ましい伝達関数)** の係数を与えた
- 簡単な係数比較だけで設計できてしまう

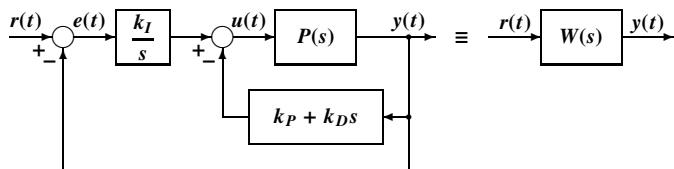
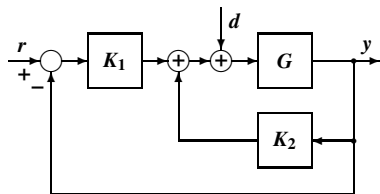


図 I-PD 制御系

cf. I-PD 制御系と2自由度制御系

I-PD 制御系



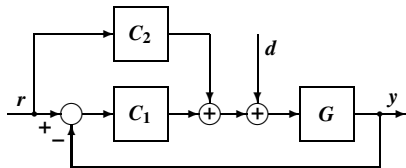
$$Y = \frac{GK_1}{1 + G(K_1 + K_2)} R + \frac{G}{1 + G(K_1 + K_2)} D$$

両者を比較すると,

$$\begin{cases} K_2 = -C_2 \\ K_1 = C_1 + C_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} C_2 = -K_2 \\ C_1 = K_1 + K_2 \end{cases}$$

ならば、目標値 r や外乱 d から出力 y までの伝達関数は一致する

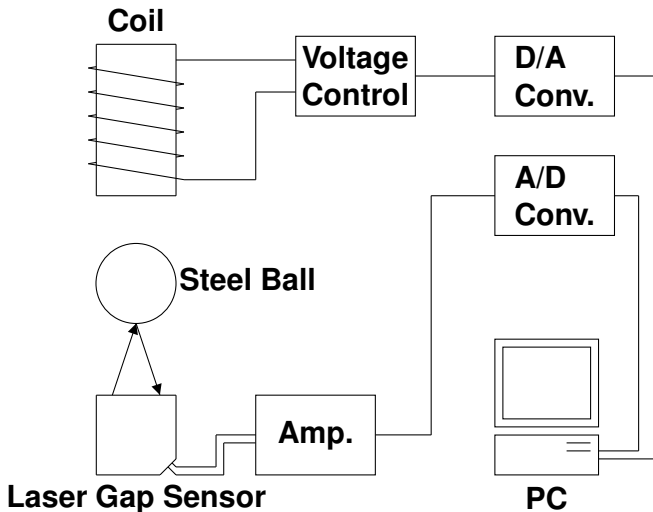
2 自由度制御系



$$Y = \frac{G(C_1 + C_2)}{1 + GC_1} R + \frac{G}{1 + GC_1} D$$

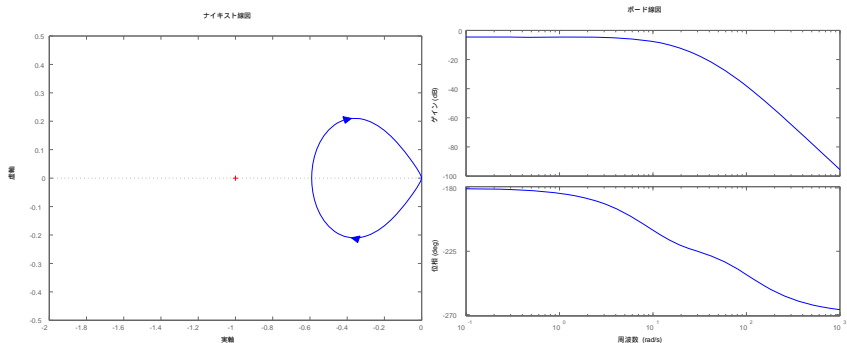
磁気浮上系

- 不安定
- 3次系
- 非線形



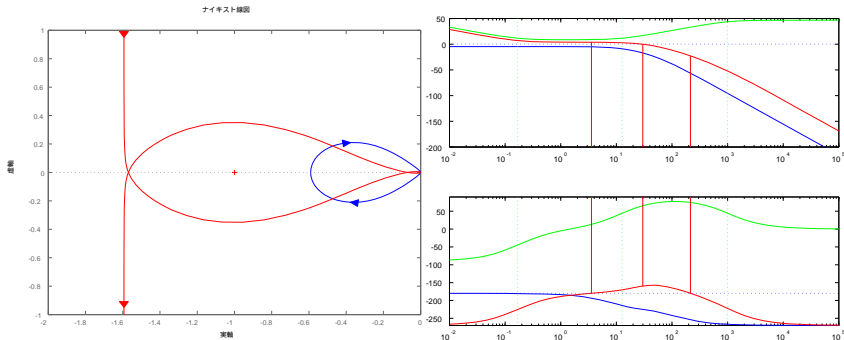
モデル

伝達関数: $P(s) = \frac{16723}{(s + 80.54)(s - 30.64)(s + 11.47)}$



コントローラ

$$\text{補償器: } C(s) = 2.729 \left(1 + \frac{1}{5.9455s} + \frac{0.0788s}{1 + 0.001s} \right)$$



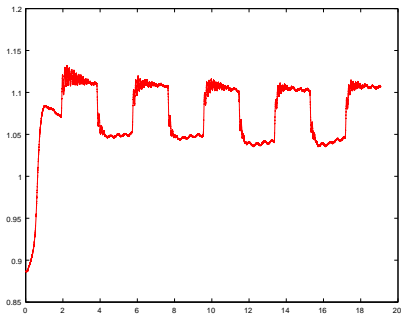
不安定極 1 個 \Rightarrow 一巡伝達関数 $L(s) = P(s)C(s)$ は, -1 を反時計回りに 1 回周らなければならない。

磁気浮上の実験

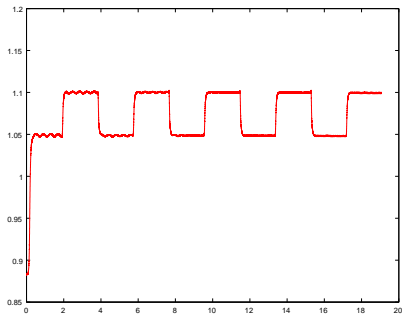
maglev

I-PD 制御と LQG の比較

I-PD 制御の結果



LQG/LTR 制御の結果



部分的モデルマッチング法

閉ループ伝達関数 $W(s)$ が、北森の参照モデル:

$$W^*(s) = \frac{1}{1 + \sigma s + 0.5\sigma^2 s^2 + 0.15\sigma^3 s^3 + 0.03\sigma^4 s^4 + 0.003\sigma^5 s^5 + \dots}$$

になるべく一致するように、 k_I, k_P, k_D, σ (時定数) を決定

$$P(s) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots}$$

のとき、閉ループ伝達関数は、

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_0 + b_0 k_P}{b_0 k_I} s + \frac{a_1 + b_0 k_D}{b_0 k_I} s^2 + \frac{a_2}{b_0 k_I} s^3 + \frac{a_3}{b_0 k_I} s^4 + \dots}$$

よって、 $\frac{a_0 + b_0 k_P}{b_0 k_I} = \sigma, \frac{a_1 + b_0 k_D}{b_0 k_I} = 0.5\sigma^2, \frac{a_2}{b_0 k_I} = 0.15\sigma^3,$

$\frac{a_3}{b_0 k_I} = 0.03\sigma^4, \dots$ となるように k_I, k_P, k_D, σ を決定する

部分的モデルマッチング法(つづき)

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots} \text{ のとき}$$

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \sim \frac{1}{a'(s)} = \frac{1}{a'_0 + a'_1s + a'_2s^2 + \dots} \text{ で近似する}$$

$$b(s)a'(s) = a(s) \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} b_0 & & & & & \\ b_1 b_0 & & & & & \\ b_2 b_1 b_0 & & & & & \\ b_3 b_2 b_1 b_0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

下三角行列なので、低次の係数 (a'_0) から順に決定していけばよい

本日のまとめ (PID 制御)

- **PID 制御**は世の中で最も広く使われている補償器
- **比例 (P), 積分 (I), 微分 (D) 動作**からなる
- **P 動作**だけでは, 一般に**定常偏差 (オフセット)**が残る
- **I 動作**により定常偏差を除去
I 動作の必要性は, **内部モデル原理**によって説明可能
- **D 動作**は位相を進ませ, 安定余裕を確保するために利用する
- **PID 補償器の Bode 線図**
- **PID 型補償器の 1 つ I-PD 制御系**が一般的に使われている
- **I-PD 制御器設計法: 部分的モデルマッチング法**は簡単!!!
係数比較だけでパラメータを求めることができる
- 望ましい伝達関数として**北森の参照モデル**が使われている。
参照モデルの時定数 σ も設計パラメータとすることで, 無理のない制御系を設計