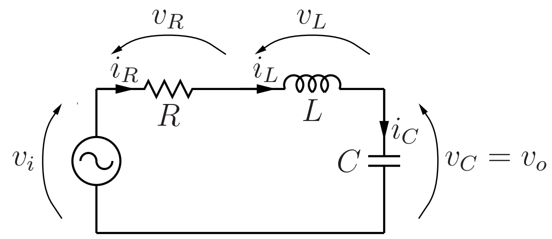
線形システム解析 レポート課題 解答例

問 4.13 下図の RLC 回路のステップ応答を求めよ．ただし，$R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ とする．



まず，物理方程式から伝達関数モデルを求める．各要素の方程式を立てると

$$
\begin{aligned}
v_R(t) &= Ri_R(t) \\
v_L(t) &= L\frac{di_L(t)}{dt} \\
v_C(t) &= \frac{1}{C}\int i_C(\tau)\,d\tau \;\Rightarrow\; i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

また，キルヒホッフの法則より

$$
\begin{aligned}
v_i(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\
i_R(t) &= i_L(t) = i_C(t)
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
\frac{di_L(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}v_C(t) + \frac{1}{L}v_i(t) \\
\frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i_L(t)
\end{aligned}
$$

初期状態を 0 とおいて，上の 2 式をラプラス変換すると

$$
sI_L(s) = -\frac{R}{L}I_L(s) - \frac{1}{L}V_C(s) + \frac{1}{L}V_i(s) \qquad (1)
$$

$$
sV_C(s) = \frac{1}{C}I_L(s) \qquad (2)
$$

(1) 式から $I_L(s)$ を求めると，

$$
I_L(s) = -\frac{1}{Ls+R}V_C(s) + \frac{1}{Ls+R}V_i(s)
$$

これを (2) 式に代入して整理すると

$$
G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}
$$

この伝達関数のステップ応答を求めればよい．

$G(s)$ を 2 次振動系の伝達関数に当てはめるため，

$$
G(s) = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}} = \frac{\kappa\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}
$$

とおくと，$\kappa = 1$, $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ となる．

条件 $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ より，減衰率は $\zeta < 1$. すなわち，上の RLC 回路は 2 次振動系である．
2 次振動系のステップ応答は

$$
\begin{aligned}
v_o(t) = {}& 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t \\
&- \frac{\zeta e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t
\end{aligned}
$$

なので，ζ と ω_n を代入すると，

$$
\begin{aligned}
v_o(t) = {}& 1 - e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}t \\
&- \frac{Re^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{4L/C - R^2}}\sin\frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}t.
\end{aligned}
$$