

主問題 (P)

双対問題 (D)

$$\begin{aligned} z &= c^T x \rightarrow \min \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= b^T y \rightarrow \max \\ A^T y &\leq c \end{aligned}$$

とするとき (D) の双対問題は (P) である。

これを証明するために、スラック変数  $s \geq 0$  を導入して、(D) の制約条件を等号制約条件にし、さらに、 $y = y_+ - y_-$ 、( $y_+ \geq 0$ ,  $y_- \geq 0$ ) とおいて、(D) を非負変数に関する等号制約条件付き最小化問題、すなわち、標準形に書き直す。

$$\begin{aligned} -v &= (-b^T \quad b^T \quad 0) \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \min \\ (A^T \quad -A^T \quad I) \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} &= c \\ \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\bar{A} = (A^T \quad -A^T \quad I), \bar{b} = c, \bar{c} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} \text{ とお$$

くと、

$$\begin{aligned} \bar{c}^T \bar{x} &\rightarrow \min \\ \bar{A} \bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

となるので、確かに標準形である。

この問題の双対問題

$$\begin{aligned} \bar{b}^T \bar{y} &\rightarrow \max \\ \bar{A}^T \bar{y} &\leq \bar{c} \end{aligned}$$

を具体的に書くと

$$\begin{aligned} c^T \tilde{y} &\rightarrow \max \\ \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} \tilde{y} &\leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、

$$c^T \tilde{y} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$A \tilde{y} \leq -b \quad (2)$$

$$-A \tilde{y} \leq b \quad (3)$$

$$\tilde{y} \geq 0 \quad (4)$$

(2), (3) 式をまとめると  $A \tilde{y} = -b$  であるので、 $\tilde{x} = -\tilde{y}$  とおくと、(D) の双対問題は結局

$$c^T \tilde{x} \rightarrow \min$$

$$A \tilde{x} = b$$

$$\tilde{x} \geq 0$$

となる。これは、(P) に他ならない。

演習問題 [9] を解くにあたって、この回答例を参考にしたものは、次の線形計画問題 (P) の双対問題 (D) を求めてみよ。

$$\begin{aligned} z &= c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \rightarrow \min \\ A_{11} x_1 + A_{12} x_2 &\geq b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (D) は以下になるはずである。

$$\begin{aligned} v &= \pi_1^T b_1 + \pi_2^T b_2 \rightarrow \max \\ \pi_1^T A_{11} + \pi_2^T A_{21} &\leq c_1 \\ \pi_1^T A_{12} + \pi_2^T A_{22} &= c_2 \\ \pi_1 &\geq 0 \end{aligned}$$