主問題(P)

$$\begin{aligned} z &= c^\top x \to \min \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題(D)

$$\begin{aligned} v &= b^\top y \to \max \\ A^\top y &\leq c \end{aligned}$$

とするとき(D)の双対問題は(P)である。

これを証明するために、スラック変数 $s \geq 0$ を導入して、(D)の制約条件を等号制約条件にし、さらに、$y = y_+ - y_-$, $(y_+ \geq 0,\ y_- \geq 0)$とおいて、(D) を非負変数に関する等号制約条件付き最小化問題、すなわち、標準形に書き直す。

$$\begin{aligned} -v = \begin{pmatrix} -b^\top & b^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} &\to \min \\ \begin{pmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} &= c \\ \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^\top & -A^\top & I \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = c$, $\tilde{c} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \\ s \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \tilde{c}^\top \tilde{x} &\to \min \\ \tilde{A}\tilde{x} &= \tilde{b} \\ \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

となるので、確かに標準形である。

この問題の双対問題

$$\begin{aligned} \tilde{b}^\top \tilde{y} &\to \max \\ \tilde{A}^\top \tilde{y} &\leq \tilde{c} \end{aligned}$$

を具体的に書くと

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{y} &\to \max \\ \begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \end{pmatrix} \tilde{y} &\leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{y} &\to \max && (1) \\ A\tilde{y} &\leq -b && (2) \\ -A\tilde{y} &\leq b && (3) \\ \tilde{y} &\leq 0 && (4) \end{aligned}$$

(2), (3)式をまとめると $A\tilde{y} = -b$ であるので、$\tilde{x} = -\tilde{y}$ とおくと、(D)の双対問題は結局

$$\begin{aligned} c^\top \tilde{x} &\to \min \\ A\tilde{x} &= b \\ \tilde{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。これは、(P)に他ならない。

演習問題 [9] を解くにあたって、この回答例を参考にしたものは、次の線形計画問題($\tilde{\text{P}}$)の双対問題($\tilde{\text{D}}$)を求めてみよ。

$$\begin{aligned} z = c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2 &\to \min \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\geq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

双対問題($\tilde{\text{D}}$)は以下のようになるはずである。

$$\begin{aligned} v = \pi_1^\top b_1 + \pi_2^\top b_2 &\to \max \\ \pi_1^\top A_{11} + \pi_2^\top A_{21} &\leq c_1 \\ \pi_1^\top A_{12} + \pi_2^\top A_{22} &= c_2 \\ \pi_1 &\geq 0 \end{aligned}$$